Schachtel

Montag, 2. September 2024 08:00

Hausaufgaben:

$V = L \cdot B \cdot H$

$V =$

$L = 30 - x \cdot 2$

$B = 21 - x \cdot 2$

$H = x$

Definitionsbereich
Wertebereich

$V = (30 - x \cdot 2) \cdot (21 - x \cdot 2) \cdot x$

$f(x) = 2x$

$f(x) = 0{,}5x + 60$

$2x = 0{,}5x + 60 \quad | -0{,}5x$

$1{,}5x = 60 \quad | : 1{,}5$

$x = 40$

Foss1

Definitionsbereich Wertebereich

$\mathbb{D} = [0, \ldots, 50]$ $\mathbb{W} = [0, \ldots, 100]$

Foss 2

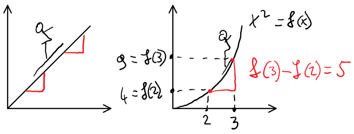
$\mathbb{D} = [0, \ldots, 80]$ $\mathbb{W} = [60, \ldots, 100)$

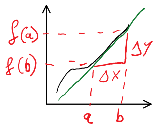
Skischanze, Steigungsdreieck, Differenzenqoutient

Dienstag, 10. September 2024 10:00

Hausaufgaben:

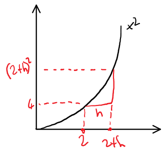
- Steigung für 3m berechnen





mittlere Steigung

$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



$m = \frac{f(2+h) - f(2)}{2+h-2}$

$= \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

$(2+h)(2+h)$

1. bin. Formel

$= \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \frac{2^2 + 2 \cdot 2 \cdot h + h^2 - 4}{h}$

$= \frac{\cancel{2^2} + 4h + h^2 - \cancel{4}}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = \frac{4h}{h} + \frac{h^2}{h}$

$\lim\limits_{h \to 0}$ $= 4 + h = 4 + 0$

$= \underline{\underline{4}} = f'(2)$

Ableitung

$\boxed{\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}} = f'a$

Differentialquotient

Ableitung (Steigung) an der Stelle a.

Die Ableitung f' der Funktion f ist der Grenzwert.

---

x: $\frac{(3+h) - 3}{h}$

$1x^0$

$\frac{a + h - a}{h}$

$= \frac{h}{h}$

$= h$

x^2: $\frac{(3+h)^2 - 3^2}{h}$

$2x^1$

$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$

$= \frac{\cancel{a^2} + 2ah + h^2 - \cancel{a^2}}{h}$

$= \frac{2ah + h^2}{h}$

$= \frac{2 \cdot a \cdot h}{h} + \frac{h^2}{h}$

$\lim\limits_{h \to 0}$

$= 2a + h = \underline{\underline{2 \cdot a}}$

x^3: $\frac{(3+h)^3 - 3^3}{h}$

$3x^2$

$\frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = \frac{(a+h)^2 \cdot (a+h) - a^3}{h}$

$= \frac{(a^2 - 2ah + h^2) \cdot (a+h) - x^3}{h}$

$= \frac{\cancel{a^3} + 2a^2h + ah^2 + a^2h + 2ah^2 + h^3 - \cancel{a^3}}{h}$

$= \frac{2a^2h}{h} + \frac{ah^2}{h} + \frac{a^2h}{h} + \frac{2ah^2}{h} + \frac{h^3}{h}$

$= 2a^2 + ah + a^2 + 2ah + h^2$

$= 2a^2 + a^2 = \underline{\underline{3a^2}}$

x^4 ...

$4x^3$

$\boxed{f(x) = x^2 \quad f'(x) = n x^{n-1}}$ $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$f(x) = x^2 + 3x$

$f'(x) = 2x + 3x\ 2$

?

Ableitungsregeln

Dienstag, 17. September 2024 10:00

Hausaufgaben:

Wichtige Ableitungsregeln

in Worten	*Formel und Beispiel*	*grafisch interpretiert*
Ein **konstanter Summand** fällt beim Ableiten weg.	$f(x) = g(x) + c$ $f'(x) = g'(x)$ Bsp.: $f(x) = x^4 + 7$ $f'(x) = 4x^3$	Wird der Graph einer Funktion nach oben oder unten verschoben, so bleibt seine Steigung an jeder Stelle gleich.
Ein **konstanter Faktor** bleibt beim Ableiten erhalten.	$f(x) = a \cdot g(x)$ $f'(x) = a \cdot g'(x)$ Bsp.: $f(x) = 3x^5$ $f'(x) = 3 \cdot 5x^4$ $= 15x^4$	Wird der Graph einer Funktion mit dem Faktor a gestreckt (gestaucht), so wird seine Steigung an jeder Stelle mit dem Faktor a multipliziert.
Eine **Summe** von zwei Funktionen hat als Ableitung die **Summe der beiden Ableitungen.**	$f(x) = g(x) + h(x)$ $f'(x) = g'(x) + h'(x)$ Bsp.: $f(x) = x^3 + x^2$ $f'(x) = 3x^2 + 2x$	Werden zwei Funktionen addiert, so addieren sich an jeder Stelle nicht nur die Funktionswerte, sondern auch die Steigungen.

18 Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5$.
Welche Ableitungsregeln haben Sie dabei angewendet?

19 Leiten Sie die Funktionen ab. Vereinfachen Sie den Ableitungsterm wenn möglich.

a) $f(x) = x^6$ b) $f(x) = \frac{1}{5}x^5$ c) $f(x) = 7x$

d) $f(x) = x + 1$ e) $f(x) = -\frac{2}{3}x^4 + x + 2$ f) $f(x) = 7$

g) $f(x) = -x + 2x^5 - x^3$ h) $f(x) = 0{,}25x^4 - x^3 + x$ i) $f(x) = 0$

j) $f(x) = \frac{x}{2} + 2^2$ k) $f(x) = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{5}$ l) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$

$f(x) = 5x^3 + 3x^3 + 5$
$= 15x^2 + 6x$

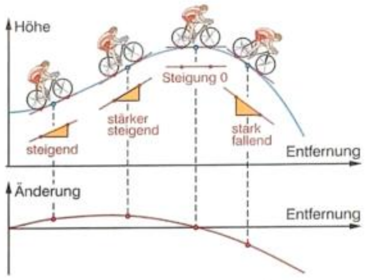
a) $6x^5$ b) x^4 c) 7

d) 1 e) $-\frac{8}{3}x^3$ f) 0

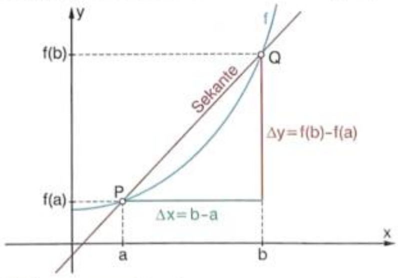
g)

Funktionen und Änderungsraten

Steigungsgraph grafisch erfasst (qualitativ)



Durchschnittliche Änderungsrate/mittlere Steigung für die Funktion f im Intervall [a; b]



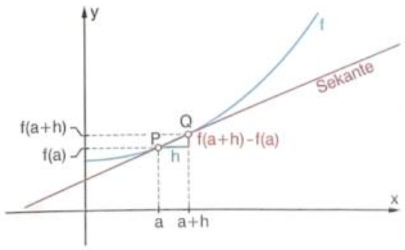
Differenzenquotient

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Steigung der **Sekante PQ**

Näherungswert für die momentane Änderungsrate der Funktion f an der Stelle a

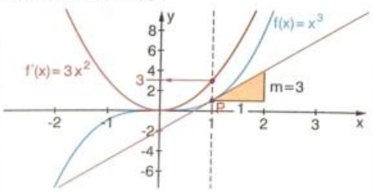
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ für kleines h (z.B. 0,001)



Die Ableitungsfunktion

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

ordnet jedem x-Wert die Steigung der Tangente im Punkt P(x|f(x)) zu (momentane Änderungsrate an der Stelle x).



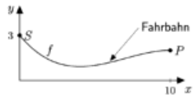
Aufgaben

Freitag, 20. September 2024 10:00

Hausaufgaben:

Buggy

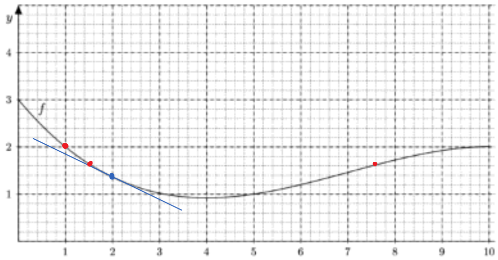
Mit ferngesteuerten Fahrzeugen, sogenannten Buggys, werden Rennen auf speziellen Fahrbahnen gefahren. Ein erster Fahrbahnabschnitt vom Startpunkt S zum Punkt P wird mithilfe einer Funktion f modelliert. An der Stelle x gibt $f(x)$ die Höhe der Fahrbahn an. Auf beiden Achsen im zugehörigen Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit einem Meter in der Wirklichkeit.



a) Auf dem Beiblatt ist der Graph der Funktion f größer dargestellt.

a1) Geben Sie mithilfe des Graphen die Höhe der Fahrbahn an der Stelle $x = 1$ an. (1 P) 2

a2) Bestimmen Sie unter Verwendung geeigneter Hilfslinien in der Abbildung auf dem Beiblatt



- die Stellen, an denen die Fahrbahnhöhe 1,6 m beträgt
- die mittlere Steigung vom Start bis zum tiefsten Punkt der Bahn und
- die Steigung der Fahrbahn an der Stelle x = 2. $\approx -0{,}2$

Buggy

Verwenden Sie für den ersten Fahrbahnabschnitt im Folgenden

$$f(x) = -0{,}01\,x^3 + 0{,}21\,x^2 - 1{,}2\,x + 3 \quad \text{mit} \quad x \in [0;\,10].$$

Ein Buggy fährt von $S(0\,|\,3)$ nach $P(10\,|\,2)$. Während der Fahrt nimmt die Höhe der Fahrbahn zunächst ab, bis sie ihren Minimalwert erreicht, und nimmt anschließend wieder zu.

b) Ermitteln Sie rechnerisch

- die mittlere Steigung vom Start bis zum tiefsten Punkt (x = 4) der Bahn und 0,52
- die Steigung der Fahrbahn an der Stelle x = 2. $= -0{,}48$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-f(4)}{4} = 0{,}525$

$f(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}21x^2 - 1{,}2x \cancel{+3}$

$= -0{,}01 \cdot 3x^2 + 0{,}21 \cdot 2x - 1{,}2$

$f'(x) = -0{,}03x^2 + 0{,}42x - 1{,}2$

$\Rightarrow -0{,}03 \cdot 2^2 + 0{,}42 \cdot 2 - 1{,}2 = -0{,}48$

Tangente (= lineare Funktion)

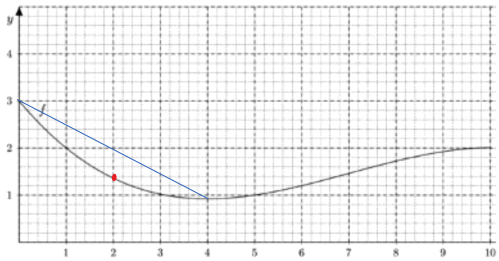
$y = m \cdot x + b$

$y = -0{,}48x + b$

$f(2) = \underbrace{-0{,}48 \cdot 2}_{-0{,}96} + b$

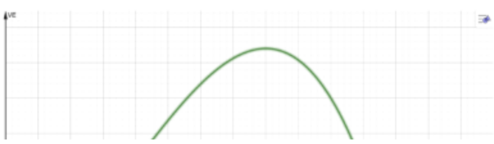
$1{,}32 = -0{,}48 \cdot 2 + b$

$2{,}28 = b$



Grippeverlauf

Im Verlauf eines grippalen Infekts steigt die Virenkonzentration im Blut zunächst auf ein Maximum und wird dann wieder abgebaut. Der Prozess wird durch die Funktion



Grippeverlauf

Im Verlauf eines grippalen Infekts steigt die Virenkonzentration im Blut zunächst auf ein Maximum und wird dann wieder abgebaut. Der Prozess wird durch die Funktion

f(t) = 6t² - t³

beschrieben mit *t*: Zeit in Tagen und f(t) in Vireneinheiten (VE) pro ml Blut.

a) Geben Sie die Virenkonzentration im Blut nach einem Tag und nach 6 Tagen an.

b) Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem die infizierte Person wieder virenfrei (gesund) ist.

c) Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate (Steigung) in den ersten 3 Tagen.

d) Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt t = 2.

e) Nach Einnahme eines Medikaments erfolgt der Abbau der Viren linear. Dieser lineare Abbau beginnt nach 5 Tagen und wird durch die Tangente **y = mt + b** Graphen von f im Punkt (5 | f(5)) beschrieben. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und damit den Zeitpunkt, zu dem die Viren unter dieser Annahme vollständig abgebaut sind.

Ausblick:

Finden Sie ein Kriterium, um die maximale Virenkonzentration zu berechnen.

$f(1) = 6 \cdot 1^2 - 1^3 = 5$

$f(6) = 6 \cdot 6^2 - 6^3 = 0$

$0 = 6t^2 - t^3 \quad | + t^3$

$t^3 = 6t^2 \quad | : t^2, t \neq 0$

$t = 6$

KEINE volle Punktzahl im Abi, weil die andere Nullstelle fehlt. (Tag 0)

c) $6 \cdot 3^2 - 3^3 = 27$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{27}{3} = 9$

d) $f(t) = 6t^2 - t^3$

$= 6 \cdot 2t - 3t^2$

$f'(t) = 12t - 3t^2$

$f'(2) = 12$

e) $f'(5) = -15 = m$

$f(5) = 25$

$25 = -15 \cdot 5 + b$

$25 = -75 + b \quad | + 75$

$100 = b$

$\Rightarrow y = -15 \cdot 25 + 75$

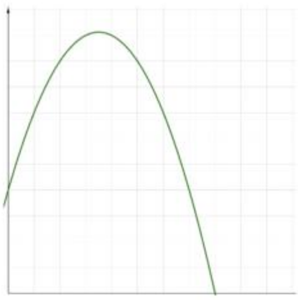
Medikamentenkonzentration im Blut

Nach Einnahme eines Schmerzmittels steigt die Konzentration des Wirkstoffs im Blut zunächst auf ein Maximum und wird dann wieder abgebaut.

Der Prozess wird durch die Funktion

f(t) = -0,5t² + 3,5t + 4

beschrieben mit *t*: Zeit in Stunden und f(t) in µg pro ml Blut.



a) Geben Sie die Konzentration im Blut zu Beginn der Einnahme und nach 3,5 h an.

b) Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem die iKonzentration auf Null gesunken ist.

c) Berechnen Sie die Zeitpunkte an den die Konzentration 9 µg beträgt.

d) Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall 1h bis 3 h.

e) Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt t = 1.

f) Nach Einnahme eines zusätzlichen Medikaments erfolgt der Abbau der Konzentration linear. Dieser lineare Abbau beginnt nach 6 Stunden und wird durch die Tangente **y = mt + b** an den Graphen von f im Punkt (6 | f(6)) beschrieben. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und damit den Zeitpunkt, zu dem das Schmerzmittel unter dieser Annahme vollständig abgebaut sind.

Ausblick:

Finden Sie ein Kriterium, um die maximale Wirkstoffkonzentration zu berechnen.

a) $f(0) = -0{,}5 \cdot 0^2 + 3{,}5 \cdot 0 + 4$
$= 4$

$f(3{,}5) = -0{,}5 \cdot 3{,}5^2 + 3{,}5 \cdot 3{,}5 + 4$
$= 10{,}125$

b) $0 = -0{,}5t^2 + 3{,}5t + 4 \quad | -3{,}5t$

$-3{,}5t = -0{,}5t^2 + 4$

Quad. Gleichung lösen
↳ pq-Formel, wenn Gleichung:
$x^2 + px + q = 0$
$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-p}{2}\right)^2 - q}$

$-0{,}5t^2 + 3{,}5t + 4 = 0 \quad | \cdot (-2)$

$t^2 \underbrace{-7}_{p} t \underbrace{-8}_{q} = 0$

$t_{1/2} = -\frac{-7}{2} \pm \sqrt{3{,}5^2 - (-8)} = 3{,}5 \pm \sqrt{\frac{81}{4}}$

$\frac{49}{4} + \frac{32}{4} = 3{,}5 \pm 4{,}5$

f) $y = mt + b$

$7 = -2{,}5 \cdot 6 + b$

$7 = -15 + b \quad | + 15$

$22 = b$

$f(6) = -0{,}5 \cdot 6^2 + 3{,}5 \cdot 6 + 4$

$7 =$

$f'(6) = -1 \cdot 6 + 3{,}5$

$-2{,}5 =$

$y = -2{,}5 \cdot t + 22 = 0 \quad | -22$

$-2{,}5 \cdot t = -22 \quad | : -2{,}5$

$t = 8{,}8$

c) $9 = -0{,}5t + 3{,}5t + 4$

d) $f(1) = -0{,}5 \cdot 1^2 + 3{,}5 \cdot 1 + 4$
$= 8$

$f(3) = -0{,}5 \cdot 3^2 + 3{,}5 \cdot 3 + 4$
$= 19$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11}{2} = 5{,}5$

e) $f(t) = -0{,}5t^2 + 3{,}5t + 4$

$f'(t) = -1t + 3{,}5$

$f'(1) = -1 \cdot 1 + 3{,}5$
$\underline{\underline{= 2{,}5}}$

Gleichungen und Funktionen

Dienstag, 1. Oktober 2024 10:00

Hausaufgaben:

E Ma | HL **Gleichungen und Funktionen**

Aufgabe 1: *Gleichungen*

a) $8x+7=2x-5$ b) $2a^2-2a=(a+2)^2$ c) $x\cdot(x^2-2x)=x^2$ d) $x^3-2x^2=x^2$

Aufgabe 2: *Nullstellen*

a) $x^2-4=0$ b) $x^2-4x-2=0$ c) $-2x^2+8x+18=0$ d) $x^3+2x^2+x=0$

Aufgabe 3: *Funktionen*

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion $f(t)=4t^2-8t+4$

b) An welcher Stelle hat $h(x)=x^2-2x+4$ den Wert 3

c) Die Graphen der Funktionen $f(x) = 2x^2 - 3x + 15$ und $g(x) = 4x^2 - 5x + 3$ besitzen zwei Schnittpunkte. Berechnen Sie diese.

d) Die Funktion $f(x) = a^2 - x^2$ ist gegeben. Bestimmen Sie $f(a)$, $f(a+h)$ und $f(ab)$.

Aufgabe 4: *Steigungen*

Gegeben ist $f(x)=x^3-2x^2$

a) Bestimmen Sie Ableitungsfunktion f'

b) Berechen Sie die Steigung an der Stelle 3.

c) Wo hat der Graph von f die Steigung - 1 ?

3a) $f(0) = 4t^2 \overset{p}{-8} t \overset{q}{+4}$

$$x_{1/2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_{1/2} = \frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 4}$$

Extrema

Dienstag, 8. Oktober 2024 10:00

Hausaufgaben:

Maximum

$f(t) = 6t^2 - t^3$

$f'(t) = 12t - 3t^2 = 0$

$t \cdot (12 - 3t) = 0$

$t_1 0$

$12 - 3t = 0$

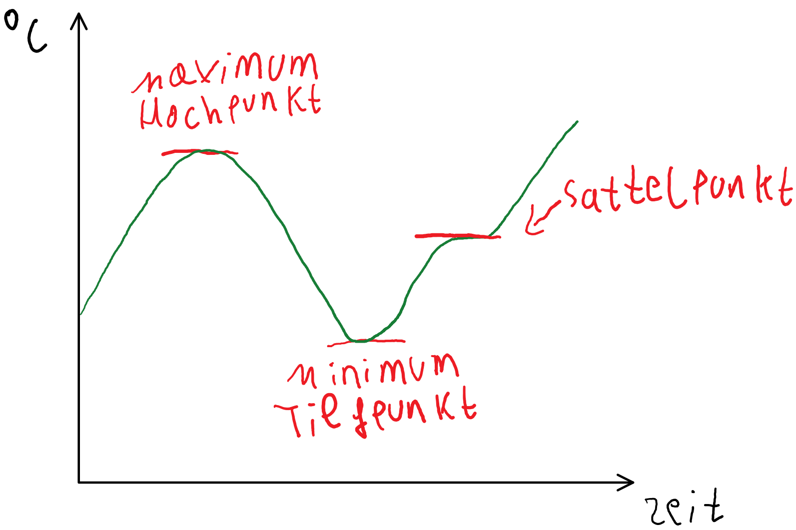
$t = 4$

$f(t) = -0{,}5t^2 + 3{,}5t + 4$

$f'(t) = -t + 3{,}5$

$0 = -t + 3{,}5 \quad | + t$

$t = 3{,}5$



Notwendiges Kriterium (für Extreme)

$f'(x) \overset{!}{=} 0$

$f(t) = -4t^3 + 60t^2 + 200$

$f'(t) = -12t^2 + 120t = 0$

$t(-12t + 120) = 0$

$t_1 = 0$

$-12t + 120 = 0 \quad | -120$

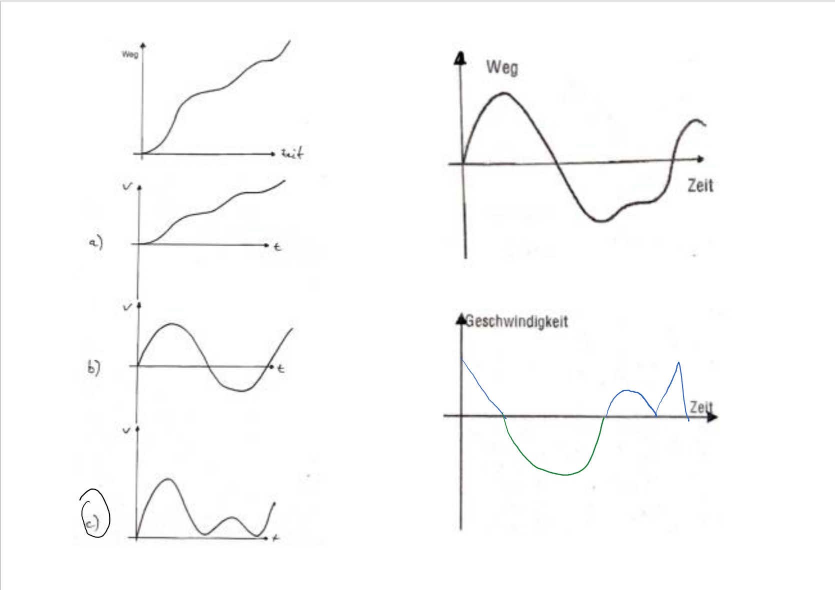
$-12t = -120 \quad | :(-12)$

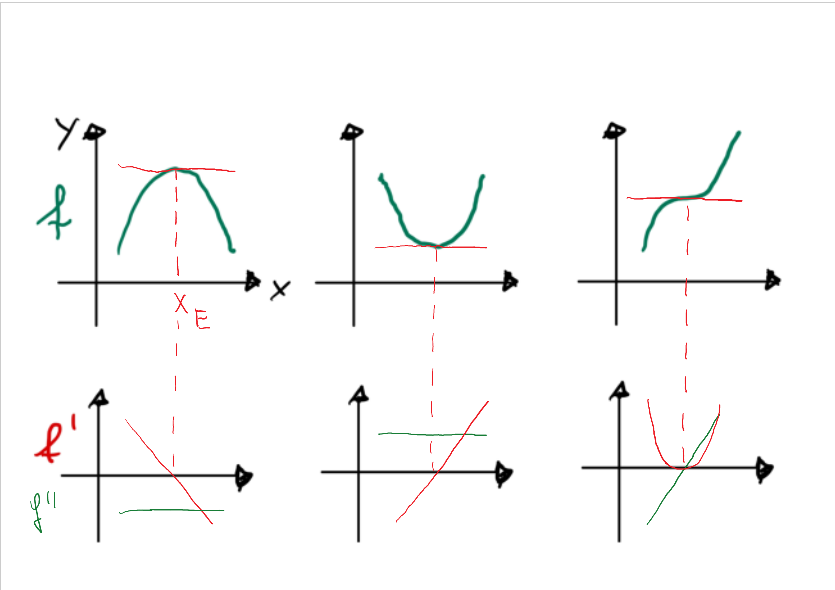
$t_2 = 10$

Grafisch ableiten

Freitag, 11. Oktober 2024 10:00

Hausaufgaben:





$f'(x_E) = 0$	$f'(x_E)=0$	$f'(x_E) = 0$
$f''(x_E) < 0$	$f''(x_E) > 0$	$f''(x_E) = 0$
(Hinreichende Bedingung)		

$f(t) = -4t^3 + 60t^2 + 200$

$f'(t) = -12t^2 + 120t$

$f''(t) = -24t + 120$

$t_1 = 0 \quad f''(0) = 24 \cdot 0 + 120 = 120 > 0$

$t_2 = 10 \quad f''(10) = 240 + 120 = -120 < 0$

$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2$

$s' = at$

$s'' = a$

$f'(x) \stackrel{!}{=} 0$ liefert „Kandidaten"

$f''(x_E) < 0$ max. Überprüfung

$f''(x_E) > 0$ Min mit f''

$f''(x_E) = 0$ Sattelpunkt

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4x$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2$

- Bestimme die Nullstellen
- Finde möglich. Extrema
- Überprüfe mit f''
- Skizziere den Verlauf

b) $g(x) = x^3 - 2x^2 = 0$

$x^2(x-2) = 0$

$x_1 = 0$ $\qquad$ $x-2=0$

$x_2 = 2$

$g'(x) = 3x^2 - 4x \stackrel{!}{=} 0$

$x(3x-4) = 0$

$x = 0$ $\qquad$ $3x - 4 = 0 \quad | +4$

$3x = 4 \quad | :3$

$x = 1{,}\overline{3}$

$g''(x) = 6x - 4$

$g''(0) = 6 \cdot 0 - 4 = -4 < 0 \Rightarrow$ Max

$g''(1{,}\overline{3}) = 6 \cdot 1{,}\overline{3} - 4 = 4 > 0 \Rightarrow$ Min

a) Nullstellen

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4x = 0 \quad | : -\frac{1}{2}$

$x^2 + 8x = 0$

$x \cdot (x+8) = 0$

$x_1 = 0$ $\qquad$ $x + 8 = 0$

$x = -8$

Extrema ($f'(x) = 0$)

Ableitung

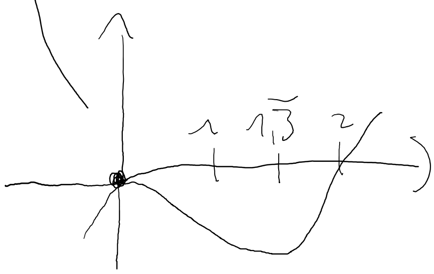
$f'(x) = -x - 4 \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow x = -4$

Überprüfung (mit $f''(x_E)$)

$f''(x) = -1$

$f''(-4) = -1 < 0 \Rightarrow$ max.



$f(0) = 0$

$f(\sqrt{3})$

Blutzuckeraufgabe

Freitag, 18. Oktober 2024 10:00

Hausaufgaben:

Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur Schleswig-Holstein

Schriftliche Abiturprüfung 2021
Name:

Kernfach Mathematik

Aufgabe 2: Analysis

Ein digitales Messgerät misst bei einem Diabetes-Patienten kontinuierlich den Glukosewert (Blutzuckerwert). Der Glukosewert dieses Patienten wird in Abhängigkeit von der Zeit t im Intervall $[0; 3{,}75]$ mit Hilfe der Funktion g mit

$$g(t) = 13 \cdot t^3 - 78 \cdot t^2 + 104 \cdot t + 96$$

modelliert. Dabei wird der Glukosewert $g(t)$ in u (Units) und die Zeit t in h (Stunden) seit Messbeginn angegeben. Die Abbildung 1 auf dem Beiblatt zeigt den Graphen von g im betrachteten Intervall.

a) a1) Bei einem Glukosewert von unter $70\,\mathrm{u}$ spricht man von Unterzuckerung. Bestimmen Sie mit Hilfe des Graphen die Länge des Zeitraums, in dem Unterzuckerung vorliegt. (2 P)

a2) Etwas mehr als drei Stunden nach Messbeginn liegt im Bereich der Unterzuckerung der niedrigste Glukosewert. Berechnen Sie den zugehörigen Zeitpunkt. (3 P)

a3) Weisen Sie nach, dass der Glukosewert eine Stunde nach Messbeginn um mehr als 40% größer ist als zu Beginn der Messung. (3 P)

b) Aus medizinischer Sicht ist ein zu schnelles Absinken des Glukosewerts gefährlich.

b1) $T(2 \mid -52)$ ist der tiefste Punkt des Graphen der Ableitungsfunktion g' über dem Intervall $[0; 3{,}75]$.
Interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang. (3 P)

b2) Die folgenden Terme beschreiben unterschiedliche Änderungsraten der Funktion g.

Term A: $\dfrac{g(3) - g(1)}{3 - 1}$

Term B: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(1+h) - g(1)}{h}$

Geben Sie an, welche Änderungsraten diese beiden Terme beschreiben. (4 P)

$g(t) = 13t^3 - 78t^2 + 104t + 96$

$g'(t) =$

Beiblatt

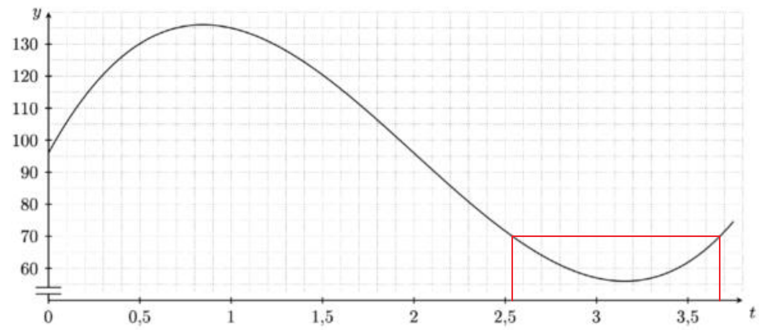


Abbildung 1: der Graph von g im betrachteten Zeitintervall $[0\,;\,3{,}75]$

Schachtel 2

Dienstag, 5. November 2024 10:00

Hausaufgaben:

$$V(x) = (30-2x)\cdot(27-2x)\cdot x$$

$$x_{1/2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-p}{2}\right)^2 - q}$$

$$V(x) = 4x^3 - 102x^2 + 630x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 204x + 630 \overset{!}{=} 0 \quad (1:12)$$

notw. Bed.

$$x^2 - 17x + 52{,}5$$

$$x_{1/2} = \frac{17}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2 - 52{,}5}$$

$x_1 \approx 12{,}94$

$x_2 \approx 4{,}06$

Hinr. Bed.

$$V''(x) = 24x - 204$$

$$V''(12{,}94) =$$

$$V''(4{,}06) = \quad < 0 \quad \text{max.}$$

Dolorosa

Dienstag, 5. November 2024 10:00

Hausaufgaben:

DOLOROSA

Die Wirkstoffmenge des Schmerzmedikaments DOLOROSA im Blutkreislauf wird innerhalb der ersten sechs Stunden nach der Einnahme des Medikaments in einer ersten Modellierung vereinfacht mittels einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades beschrieben.
Dabei werden die Werte der t-Achse als Zeit in Stunden nach der Einnahme, die Funktionswerte $f(t)$ als Menge des Wirkstoffes im Blut in mg aufgefasst.

a) Aus den Testdaten von Probanden, die vor Einnahme von DOLOROSA keinen Wirkstoff im Blut hatten, geht hervor, dass sich eine Stunde nach der Einnahme des Medikaments 125 mg des Wirkstoffes im Blut befinden. Nach einer weiteren Stunde wird die maximale Wirkstoffmenge gemessen, und nach insgesamt sechs Stunden ist der Wirkstoff vollständig abgebaut.

- Die Abbildungen unten zeigen vier Funktionsgraphen. Geben Sie sowohl den zur Funktion f als auch den zur Ableitungsfunktion f' gehörenden Graphen an und begründen Sie Ihre Auswahl kurz.

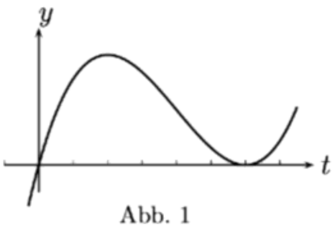


Abb. 1

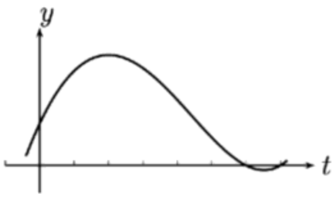


Abb. 2

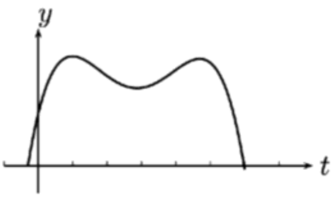


Abb. 3

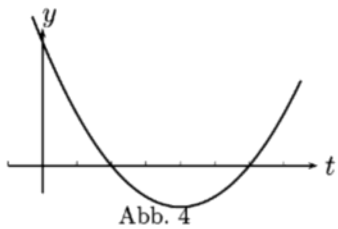


Abb. 4

Verwenden Sie im Folgenden die Funktionsgleichung $f(t) = 5t^3 - 60t^2 + 180t$

b) Berechnen Sie, wie groß die Zunahmerate der Wirkstoffmenge eine Stunde nach der Einnahme des Medikaments ist.

c) Überprüfen Sie, ob nach 2 Stunden die max. Wirkstoffmenge erreicht wird.

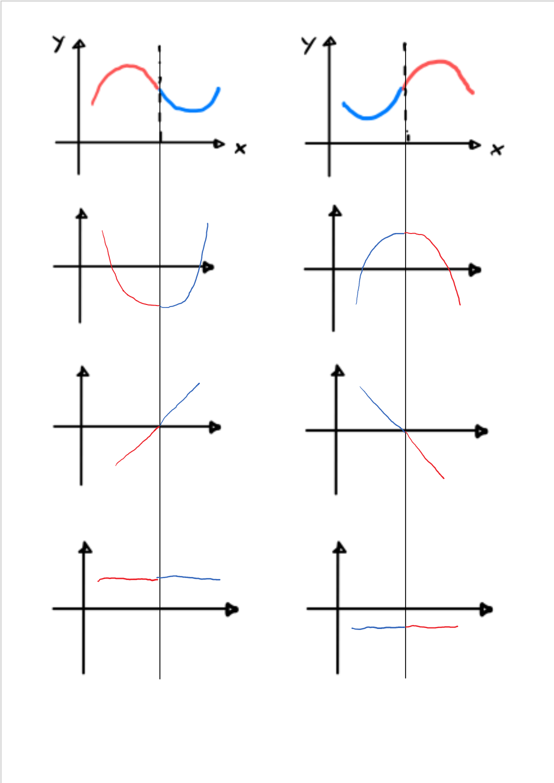
Ausblick:

d) Bestimmen Sie die lokal größte Abnahmerate des Wirkstoffs im Blut.

Wendestelle/Wendepunkt

Freitag, 8. November 2024 10:00

Hausaufgaben:



Wendepunkte

Notwendige Bed.

$f''(x) = 0$

Hinreichendes Krit.

$f'''(x_W) > 0$ R-L

$f'''(x_W) < 0$ L-R

$f'(x) \stackrel{!}{=} 0$ liefert „Kandidaten"

$f''(x_E) < 0$ max. Überprüfung

$f''(x_E) > 0$ Min mit f''

$f''(x_E) = 0$ Sattelpunkt

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ min/max

$f'(x) = x^2 - 4 = 0 \quad | +4$

$x^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$f'(x) = x^2 - 4$

$f''(x) = 2x$

$f''(2) = 2 \cdot 2 = 4 > 0 \rightarrow$ Min.

$f''(-2) = 2 \cdot (-2) = -4 < 0 \rightarrow$ max.

Wendestelle

$f''(x) = 2x = 0$

$x = 0$

$f'''(x) = 2$

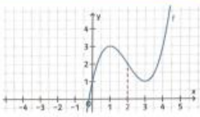
Hier lernst du, wie du berechnen kannst, an welchen Stellen die Funktion $f(x) = 0{,}5x^4 - 12x^2$ Wendepunkte hat.

DAS BRAUCHST DU WIEDER

Allgemein: $f''(x) > 0$: f ist linksgekrümmt
$f''(x) < 0$: f ist rechtsgekrümmt

Beispiele: $x < 2$: $f''(x) < 0$ f ist rechtsgekrümmt
$x > 2$: ______________

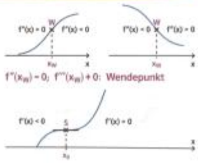
____



DARUM GEHT'S

Beim Übergang von einer Krümmung zur anderen hat der Graph einen Wendepunkt $\mathbf{W}(x_0 | f(x_0))$: $f''(x_0) = 0$.

Am Wendepunkt hat $f''(x_0)$ einen **VZW**.
Für den Nachweis eines Wendepunkts kannst du die 3. Ableitung $f'''(x)$ verwenden: $f'''(x_0) \neq 0$.
Ist zusätzlich $f'(x_0) = 0$, so hat f hier einen Sattelpunkt.
Ein **Sattelpunkt** ist ein Wendepunkt mit der Steigung 0.



$f''(x_W) = 0$; $f'''(x_W) \neq 0$: Wendepunkt

Bestimmen von Wendepunkten

Diese Strategie verwendest du, wenn du die Wendepunkte einer Funktion f berechnen willst.

SO GEHT'S

1 **Beispiel**
Es wird die Funktion
$f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3x^2 - 3$
betrachtet.
Berechne die Wendepunkte.

Bilde die ersten drei Ableitungen:

$f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3x^2 - 3$

$f'(x) = \frac{1}{6} \cdot 4x^3 - \frac{4}{3} \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x$

$f'(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x$

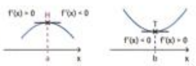
$f''(x) = \frac{2}{3} \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2x + 6$

$f''(x) = 2x^2 - 8x + 6$

$f'''(x) = 4x - 8$

Du bist dran
Es wird die Funktion
$f(x) = 0{,}5x^4 - 12x^2$
betrachtet.
Berechne die Wendepunkte.

Beim Übergang von monoton wachsend zu monoton fallend und umgekehrt liegt ein **Extrempunkt** $(x_0 | f(x_0))$, in dem die Steigung Null ist: $\mathbf{f'(x_0) = 0}$.
Es gibt zwei Arten von Extrempunkten.
Hochpunkte: $f'(x)$ wechselt das Vorzeichen von plus nach minus (VZW +/−).
Tiefpunkte: $f'(x)$ wechselt das Vorzeichen von minus nach plus (VZW −/+).
Diese Eigenschaft kann auch mit der 2. Ableitung beschrieben werden.



$f'(a) = 0$; $f''(a) < 0$: Hochpunkt	$f'(b) = 0$; $f''(b) > 0$: Tiefpunkt
Hochpunkt $(a \mid f(a))$	**Tiefpunkt** $(b \mid f(b))$
$f'(a) = 0$ mit VZW +/−	$f'(b) = 0$ mit VZW −/+
$f''(a) < 0$	$f''(b) > 0$

Bestimmen von Extrempunkten

Diese Strategie verwendest du, wenn du die Extrempunkte einer Funktion bestimmen willst.

SO GEHT'S

1 **Beispiel**
Es wird die Funktion
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ betrachtet.
Berechne die Extrempunkte von f und bestimme ihre Art.

Bilde die 1. und die 2. Ableitung:

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$

$f'(x) = x^2 - 4$

$f''(x) = 2x$

Setze die 1. Ableitung $f'(x) = 0$ und löse die Gleichung:

$x^2 - 4 = 0 \quad | +4$
$x^2 = 4 \quad | \pm\sqrt{\ }$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$
$x_1 = 2$; $x_2 = -2$

Setze die Lösungen in die 2. Ableitung $f''(x)$ ein:

$f''(2) = 2 \cdot 2 = 4 > 0$
$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $x = 2$
$f''(-2) = 2 \cdot (-2) = -4 < 0$
$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $x = -2$

Setze die Lösungen in die Funktionsgleichung von f zur Bestimmung der y-Werte:

$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 = -\frac{16}{3}$
Tiefpunkt $T\left(2 \middle| -\frac{16}{3}\right)$
$f(-2) = \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2) = \frac{16}{3}$
Hochpunkt $H\left(-2 \middle| \frac{16}{3}\right)$

Du bist dran
Es wird die Funktion
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$ betrachtet.
Berechne die Extrempunkte von f und bestimme ihre Art.

Setze die 2. Ableitung $f''(x) = 0$ und löse die Gleichung:

$2x^2 - 8x + 6 = 0$

$x_1 = 1$; $x_2 = 3$

Setze die Lösungen in die 3. Ableitung ein:

$f'''(1) = 4 \cdot 1 - 8 = -4 \neq 0$
$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x = 1$
$f'''(3) = 4 \cdot 3 - 8 = 4 \neq 0$
$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x = 3$

Setze die Lösungen in die Funktionsgleichung von f zur Bestimmung der y-Werte:

$f(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^4 - \frac{4}{3} \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 3 = -\frac{7}{6}$
Wendepunkt $W_1\left(1 \middle| -\frac{7}{6}\right)$
$f(3) = \frac{1}{6} \cdot 3^4 - \frac{4}{3} \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 - 3 = 1{,}5$
Wendepunkt $W_2(3 \mid 1{,}5)$

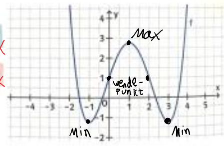
2 Berechne die Wendepunkte der Funktion f.
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$
b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x$

3 Bestimme den Wendepunkt der Funktion f und die Steigung im Wendepunkt.
a) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 7x$
b) $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 - x^2 + 6$

2 Berechne die Hoch- und Tiefpunkte von f.
a) $f(x) = -2x^2 + 12x + 14$
b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3{,}5x^2 + 10x$

3 Welche der Aussagen treffen zu?

A $f'(1) = 0$ ✓
B $f''(3) = 0$ ✗
C $f'(3) < 0$ ✗
D $f'(-1) = 0$ ✓
E $f''(-1) > 0$ ✓
F $f''(1) > 0$ ✗



4 Berechne die Hoch- und Tiefpunkte der Funktion $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 3x^3$.
Untersuche und beschreibe den Verlauf von f an der Stelle $x = 0$.

Extrema (min, Max, Sattel)
$f'(x_E) \stackrel{!}{=} 0$ notw. Bed.
+
$f''(x_E) < 0 \Rightarrow$ Max
$f''(x_E) > 0 \Rightarrow$ Min
Überprüfung mit f''

Wendepunkte
$f''(x) \stackrel{!}{=} 0$ notw. Bed.
+
$f'''(x_W) \neq 0$

$f(x) = -0{,}75x^3 + 2{,}25x + 1{,}5$

a) $f(-1) = 0$
$f(2) = 0$

b) $f'(x) = -2{,}25x^2 + 2{,}25 \stackrel{!}{=} 0 \quad |:-2{,}25$
$x^2 - 1 = 0 \quad |+1$
$x^2 = 1 \quad |\sqrt{\ }$
$\boxed{x_1 = 1,\ x_2 = -1}$

$f''(x) = -4{,}5x$
$f''(1) = -4{,}5 < 0 \Rightarrow$ Max.
$f''(-1) = 4{,}5 > 0 \Rightarrow$ Min

Klausurvorbereitung

Freitag, 15. November 2024 10:00

Hausaufgaben:

Klausur-Vorbereitung

Aufgabe 1: *Grundwissen*
a) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$f(x) = 5x^6 + 3x - 7$ und $g(x) = 4x^5 - 2x^3 + 4x + 1$ sowie $h(x) = x^n - 12x^{n-1}$

b) Berechnen Sie die Ableitungsfunktion f' der Funktion $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ mithilfe der Ableitungsregeln und bestimmen Sie anschließend den Wert der Ableitung an der Stelle $a = 2$.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten und darauf folgender Grenzwertbildung die Ableitungsfunktion der Funktion $f(x) = x^2 - 2$ an einer Stelle a. Benutzen Sie die *h*-Methode.

Aufgabe 2: *Tangente und Steigung*
Gegeben ist die Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = x^3 + 3x - 5$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $a = 1$.

b) Ermitteln Sie die Stellen, an der der Graph von f die Steigung $m = 6$ hat.

Aufgabe 3: *Funktionsuntersuchung*
Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = -2x^3 + x^2 + 4x$.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

b) Berechnen Sie die Stellen mit waagerechter Tangente.

c) Skizzieren Sie den Graphen von f in einem sinnvoll gewählten Bereich.

Aufgabe 4: *Anwendung*
Ein Ball wird von einem 50 m hohen Turm mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 20\ m/s$ in die Luft geschossen. Die Höhe des Balls über dem Erdboden kann mithilfe der Funktion $h(t) = 50 + 20t - 5t^2$ beschrieben werden.

a) Berechnen Sie die Höhe des Balls über dem Erdboden nach 3 Sekunden.

b) Nach wie viel Sekunden hat der Ball den Erdboden erreicht?

c) Nach welcher Zeit hat der Ball den höchsten Punkt erreicht?

Ministerium für Allgemeine und Berufliche Bildung, Wissenschaft, Forschung und Kultur Schleswig-Holstein — Schriftliche Abiturprüfung 2024
Name:
Kernfach Mathematik

Aufgabe 2: Analysis-WTR

Während eines Sommertages werden von 4:00 Uhr morgens bis 18:00 Uhr abends Wetterdaten von einer Messstation aufgenommen.

Eine Messgröße ist die Temperatur der Luft. Die Funktion s mit

$$s(t) = -0{,}03\,t^3 + 0{,}95\,t^2 - 8\,t + 33 \quad \text{und} \quad 4 \le t \le 18$$

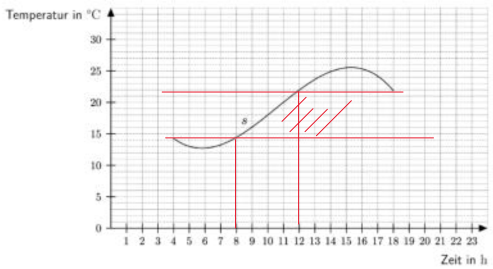
beschreibt diese Messergebnisse. Dabei gibt t die vergangene Zeit seit 0:00 Uhr in Stunden (h) an und $s(t)$ die Temperatur in Grad Celsius (°C).
Der Graph von s ist in Abbildung 1 auf dem Beiblatt dargestellt.

a) a1) Bestimmen Sie rechnerisch die maximale und die minimale Temperatur im Messzeitraum. (5 BE)

a2) Außer der maximalen und der minimalen Temperatur gibt es weitere Temperaturen, die bei dieser Messung nur einmal auftreten.
Ermitteln Sie näherungsweise anhand der Abbildung 1 diese Temperaturen und die entsprechenden Uhrzeiten. Zeichnen Sie dazu geeignete Hilfslinien ein. (4 BE)

a3) Berechnen Sie sowohl die größte als auch die kleinste momentane Änderungsrate der Temperatur im Messzeitraum. (5 BE)

Abbildung 1



Klausur

- Diese Aufgaben
- 1c kommt nicht (h-Methode)

1b) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$
$f'(x) = 6x^2 - x$
$f'(2) = 6 \cdot 2^2 - 2 = 22$

2a) $f(x) = x^3 + 5x - 5$ $\quad f(1) = 1$
$f'(x) = 3x^2 + 5$ $\quad f'(1) = 8$
$y = mx + b$
$1 = 8 \cdot 1 + b$
$1 = 8 + b \quad | -8$
$-7 = b \quad \Rightarrow \quad y = 8x - 7$

2b) $f'(x) = 3x^2 + 5 = 6 \quad | -5$
$3x^2 = 1 \quad | :3$
$x^2 = \frac{1}{3} \quad | \sqrt{\ }$
$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

3a) $f(x) = -2x^3 + x^2 + 4x$
$x(-2x^2 + x + 4) = 0$
$x_1 = 0$ $\quad -2x^2 + x + 4 = 0 \quad | :(-2)$
$x^2 - \frac{1}{2}x - 2 = 0$
$-\frac{-0{,}5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-0{,}5}{2}\right)^2 + 2} = x_2 \approx 1{,}686 \quad x_3 \approx -1{,}186$

3b) $f'(x) = -6x^2 + 2x + 4 = 0 \quad | :(-6)$
$x^2 - 0{,}\overline{3}x - 0{,}\overline{6} = 0$
$-\frac{-0{,}\overline{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-0{,}\overline{3}}{2}\right)^2 + 0{,}\overline{6}} = x_1 = 1 \quad x_2 = -0{,}\overline{6}$

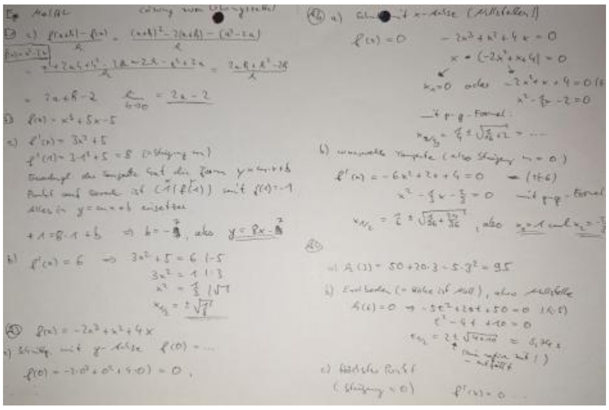
4a) $h(t) = 50 + 20t - 5t^2 \quad h(3) = 65$
4b) $h(t) = 50 + 20t - 5t^2 = -5t^2 + 20t + 50 = 0 \quad | :(-5)$
$t^2 - 4t - 10 = 0$
$-\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + 10} = x_1 \approx 5{,}742 \quad x_2 \approx -1{,}742$

zusatzaufgabe:
$f(x) = x^3 - 12x + 11$
$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \quad | +12$
$3x^2 = 12 \quad | :3$
$x^2 = 4 \quad | \sqrt{\ldots}$
$x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = -2$
$f''(x) = 6x$
$f''(2) = 12 > 0 \Rightarrow \text{min}$ $\quad f(2) = -5$
$f''(-2) = -12 < 0 \Rightarrow \text{max}$ $\quad f(-2) = 27$
$HP(-2|27) \quad TP(2|-5)$

4c) $h(t) = 50 + 20t - 5t^2$
$h'(t) = 20 - 10t = 0 \quad | -20$
$-10t = -20 \quad | :(-10)$
$t = 2$

1) $s(t) = -0{,}03t^3 + 0{,}95t^2 - 8t + 33$
$s'(t) = -0{,}09t^2 + 1{,}9t - 8 = 0 \quad | :(-0{,}09)$
$t^2 - 21{,}\overline{1}t - 88{,}\overline{8} = 0$
$-\frac{-21{,}\overline{1}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-21{,}\overline{1}}{2}\right)^2 - 88{,}\overline{8}} = x_1 \approx 15{,}302 \quad x_2 \approx 5{,}809$
$s(15{,}302) \ldots$
$s(5{,}809) \ldots$

2) $s''(t) = -0{,}18t + 1{,}9 = 0 \quad | -1{,}9$
$-0{,}18t = -1{,}9 \quad | :(-0{,}18)$
$t = 10{,}\overline{5}$



13) c) $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-2(a+h)-(a^2-2a)}{h}$ $\quad f(x)=x^2-2x$

$= \frac{a^2+2ah+h^2-2a-2h-a^2+2a}{h} = \frac{2ah+h^2-2h}{h}$

$= 2a+h-2 \quad \xrightarrow{h \to 0} \quad \underline{2a-2}$

14) $f(x)=x^3+5x-5$

a) $f'(x)=3x^2+5$

$f'(1)=3\cdot1^2+5=8$ (= Steigung m)

Geradengl. der Tangente hat die Form $y=m\cdot x+b$

Punkt auf Gerade ist $(1|f(1))$ mit $f(1)=1$

Alles in $y=mx+b$ einsetzen

$+1=8\cdot1+b \Rightarrow b=-7$, also $\underline{y=8x-7}$

b) $f'(x)=6 \Rightarrow 3x^2+5=6 \quad |-5$

$3x^2=1 \quad |:3$

$x^2=\frac{1}{3} \quad |\sqrt{\ }$

$x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

15) $f(x)=-2x^3+x^2+4x$

a) Schnittp. mit y-Achse $f(0)=\ldots$

$f(0)=-2\cdot0^3+0^2+4\cdot0=0$.

16) a) Schn... mit x-Achse (Nullstellen!)

$f(x)=0 \quad -2x^3+x^2+4x=0$

$x\cdot(-2x^2+x+4)=0$

$x_1=0$ oder $-2x^2+x+4=0 \quad |:(-2)$

$x^2-\frac{1}{2}x-2=0$

mit p-q-Formel

$x_{2/3}=\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+2}=\ldots$

b) waagerechte Tangente (also Steigung m = 0)

$f'(x)=-6x^2+2x+4=0 \quad |:(-6)$

$x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}=0$ mit p-q-Formel

$x_{1/2}=\frac{1}{6}\pm\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{24}{36}}$, also $\underline{x_1=1}$ und $\underline{x_2=-\frac{2}{3}}$

20)

a) $h(3)=50+20\cdot3-5\cdot3^2=65$

b) Erdboden (= Höhe ist Null), also Nullstelle

$h(t)=0 \Rightarrow -5t^2+20t+50=0 \quad |:(-5)$

$t^2-4t-10=0$

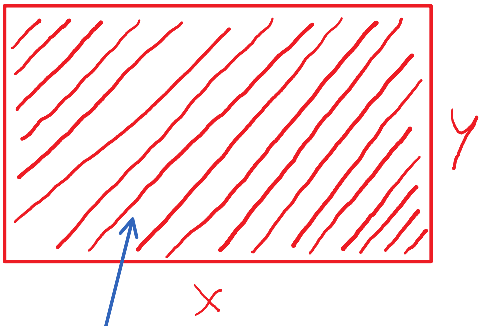
$t_{1/2}=2\pm\sqrt{4+10} \approx 5{,}74$ s (... negativ fällt weg!)

c) Höchster Punkt (Steigung = 0) $\quad h'(t)=0 \ldots$

Optimierungen

Freitag, 6. Dezember 2024 10:00

Hausaufgaben:



Umfang 200 m

$U = 2x + 2y$

$\boxed{200 = 2x + 2y}$

Nebenbedingung

$A(x,y) = x \cdot y$

Zielfunktion

$$200 = 2x + 2y \quad |-2x$$

$$200 - 2x = 2y \quad |:2$$

$$100 - x = y$$

$$A(x) = x \cdot (100 - x) = 100x - x^2$$

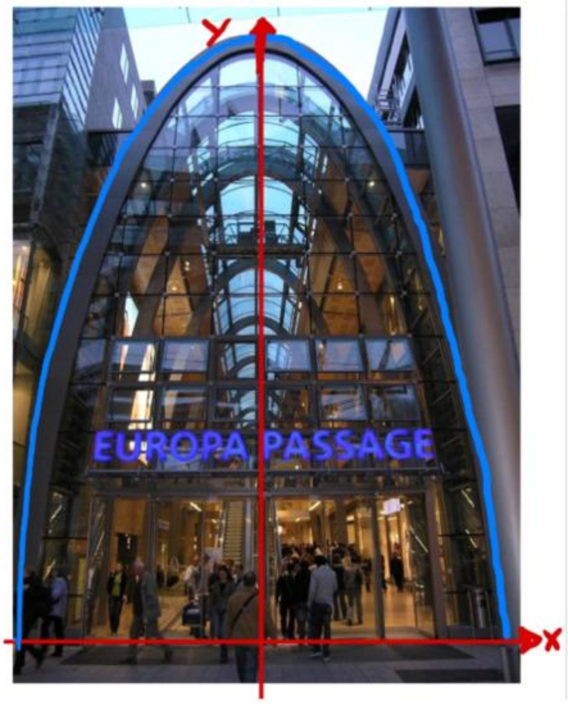
$$A'(x) = 100 - 2x = 0$$

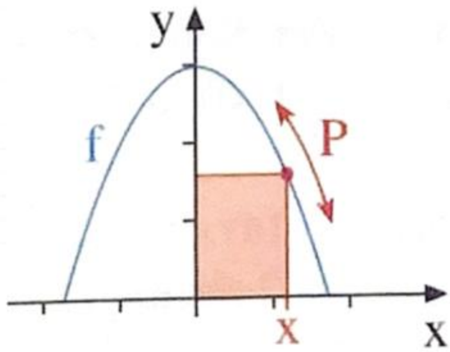
$$100 = 2x$$

$$50 = x$$

Europapassage

Zu Werbezwecken soll in der Eingangsfront der Einkaufspassage ein rechteckiges Plakat aufgehängt werden.
Der charakteristische Verlauf der Rundbögen kann durch die Funktion $f(x) = -x^2 + 3$ beschrieben werden mit 1 LE = 10 m in Wirklichkeit.





Bestimmen Sie die Befestigungspunkte auf den Rundbögen so, dass die Plakatfläche maximal wird.

Stellen Sie hierzu zunächst eine **Zielfunktion** (Fläche)**:**

$$A = 2x \cdot y$$

und eine weitere **Nebenbedingung** auf:

$$y = f(x) = -x^2 + 3$$

$$A(x) = 2x \cdot f(x) = 2x \cdot (-x^2+3) = -2x^3 + 6x$$

$$A'(x) = -6x^2 + 6 = 0$$

$$-6x^2 = 6$$

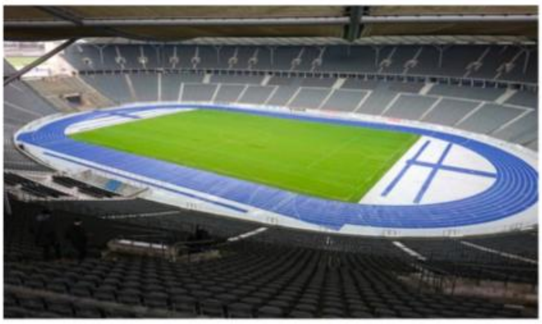
$$x^2 = 1$$

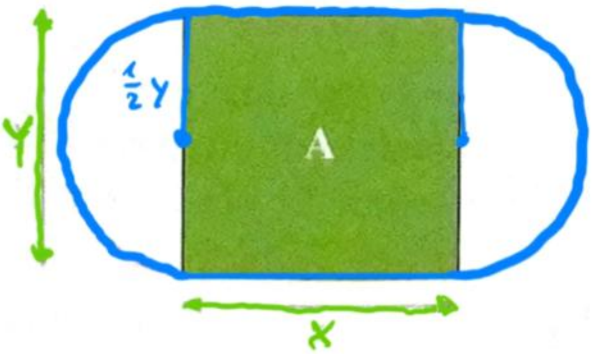
$$x_{1/2} = \pm 1$$

$$f(1) = -1^3 + 3 = 2$$

Stadion

Das abgebildete Stadion (Olympia-Stadion Berlin) hat die Form eines Rechtecks mit zwei angesetzten Halbkreisen.





Der Umfang (einer Stadionrunde) beträgt 400 m.

Bestimmen Sie die Abmessungen des Rechtecks so, das die Rasenfläche maximal wird.

Stellen Sie hierzu zunächst eine **Zielfunktion** (Fläche)**:**

$A(x,y) = x \cdot y$

und eine **Nebenbedingung** auf:

$400 = 2x + y\pi \quad | -2x$

$400 - 2x = y\pi \quad | :\pi$

$\frac{400-2x}{\pi} = y$

$A(x) = x\left(\frac{400-2x}{\pi}\right) = \frac{400}{\pi} \cdot x - \frac{2}{\pi} \cdot x^2$

$A'(x) = \frac{400}{\pi} - \frac{4}{\pi} \cdot x = 0 \quad | + \frac{4}{\pi}x$

$\frac{400}{\pi} = \frac{4}{\pi}x \quad | \cdot \pi$

$400 = 4x \quad | :4$

$100 = x$

$$y = \frac{400-200}{\pi} = \frac{200}{\pi} = 63$$

Verpackung

$V = 1L = 1000 cm^3$

$A = 4ah + 2a^2$

$1000 = a^2 \cdot h \quad | : a^2$

$1000 : a^2 = h$

$A = 4a \cdot 1000 : a^2 + 2a^2$

$A = 4\cancel{a} \frac{1000}{a^{\cancel{2}}} + 2a^2$

$A = \frac{4000}{a} + 2a^2$

$A = 4000 \cdot a^{-1} + 2a^2$

$A' = -4000 a^{-2} + 4a$

$A' = 4a - \frac{4000}{a^2} = 0 \quad | \cdot a^2$

$4a^3 - 4000 = 0 \quad | + 4000$

$4a^3 = 4000 \quad | : 4$

$a^3 = 1000 \quad | \sqrt[3]{\ldots}$

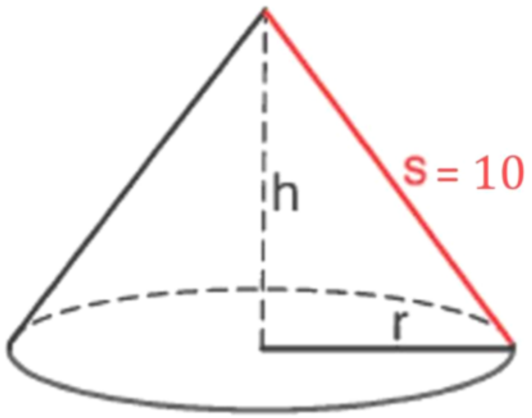
$a = 10$

Opitimale Pommestüte

Findet den Kegel mit maximalem Volumen und mit einer Mantellinie von s=10! (Findet r und h)

Volumen eines Kegels:

$$V(h,r) = \frac{1}{3}\pi\, h\, r^2$$



Hinweis: Die Nebenbedingung ist nach r umzustellen.

$100 = r^2 + h^2 \quad | -h^2$

$100 - h^2 = r^2 \quad | \sqrt{}$

$\sqrt{100-h^2} = r$

$V(h,r) = \frac{1}{3}\pi h\,(100-h^2)$

Optimierungen II

Freitag, 10. Januar 2025 10:00

Hausaufgaben:

Optimale Dose

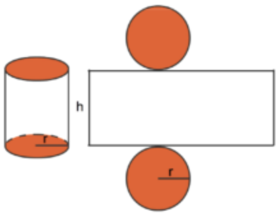
Das Fassungsvolumen einer zylindrischen Getränkedose soll **330 ml** betragen.

Aus Kostengründen (und der Umwelt zuliebe) soll der Materialbedarf möglichst niedrig gehalten werden.

Ermitteln Sie Radius und Höhe einer solchen „optimalen“ Dose.

Stellen Sie hierzu zunächst eine **Zielfunktion** (Oberfläche)**:**

$A(r,h) = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$



und eine **Nebenbedingung** auf:

$V = 330 = \pi r^2 \cdot h$

Nebenbedingung Hauptbedingung

$V = 330 = 2\pi r^2 \cdot h \mid \div h$

$330 = \dfrac{330}{\pi r^2} = h$

$2\pi r \cdot \dfrac{330}{\pi r^2} + 2\pi r^2$

$A(r) = \dfrac{660}{r} + 2\pi r^2 = 660 \cdot r^{-1} + 2\pi r^2$

$A'(r) = -660 \cdot r^{-2} + 2\pi 2r$

$A'(r) = -\dfrac{660}{r^2} + 4\pi r = 0 \mid \cdot r^2$

$4\pi r^3 - 660 = 0$

$r^3 = \dfrac{660}{4\pi}$

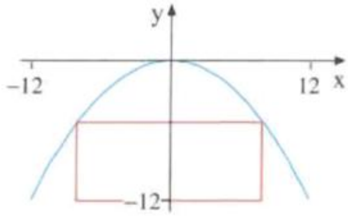
$r = \sqrt[3]{\dfrac{660}{4\pi}} = 3{,}74$

$d = 7{,}48$

$h = \dfrac{330}{\pi \cdot 3{,}74^2} \approx 7{,}5$

Tennishalle

20. Eine 12 m hohe Tennishalle hat ein parabelförmiges Profil. In die Giebelwand soll auf der Rückseite ein rechteckiges Kunststofffenster maximaler Fläche eingebaut werden (Abb.). Bezogen auf das eingezeichnete Koordinatensystem kann die Innenwand der Halle durch die Funktion $y = -\frac{1}{12}x^2$ beschrieben werden. Die Mauer zwischen dem Fenster und der Innenwand wird modellhaft vernachlässigt. Welche Maße hat das Fenster?



21. Ein quaderförmiger, oben offener Container soll halb so hoch wie breit sein und ein Volumen von 108 m^3 besitzen.
Welche Maße muss der Container erhalten, damit der Materialverbrauch minimal wird?

Tennishalle

Zielfunktion: $A(x, y) = 2x \times (-12 - y)$
Nebenbedingung: $y = -\frac{1}{12}x^2$

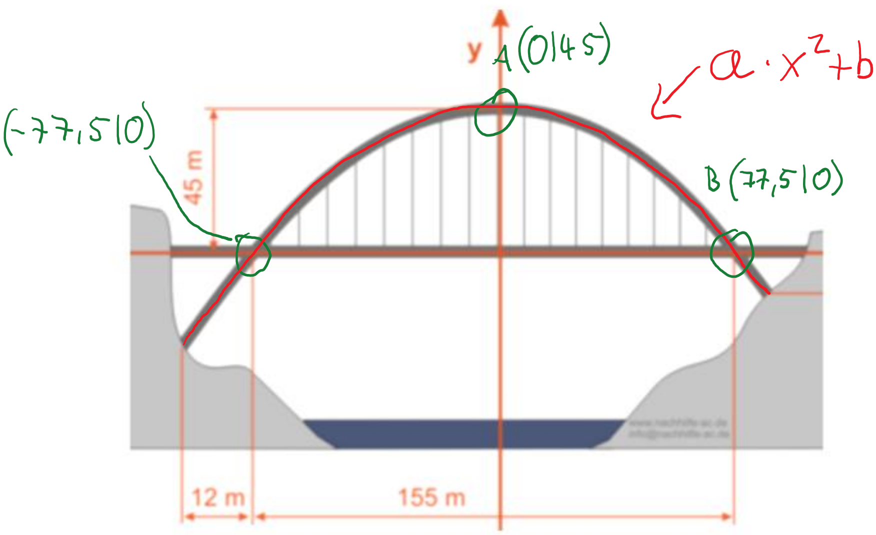
Nebenbedingung in Zielfunktion:

$A(x) = 2x \times \left(12 - \frac{1}{12}x^2\right)$
$A(x) = 24x - \frac{1}{6}x^3$
$A'(x) = 24 - \frac{1}{2}x^2 = 0$
$24 = \frac{1}{2}x^2$
$48 = x^2$

Modellieren

Dienstag, 14. Januar 2025 10:01

Hausaufgaben:



$f(x) = a \cdot x^2 + b$

wegen $\overset{A}{(0|45)}$

$\Rightarrow b = 45$

Bed. I

$f(0) = 45$ $\quad a \cdot 0^2 + b = 45 \Rightarrow b = 45$

Bed. II

$f(77{,}5) = 0$

$a \cdot 77{,}5^2 + 45 = 0 \quad | -45$

$a \cdot 77{,}5^2 = -45 \quad | : 77{,}5^2$

$a = \frac{-45}{77{,}5^2}$

$a = -0{,}0075$

$f(x) = -0{,}0075x^2 + 45$

Elbquerung

Die Freileitung verbindet das Schaltwerk Wilster mit dem Umspannwerk Dollern, das östlich von liegt.

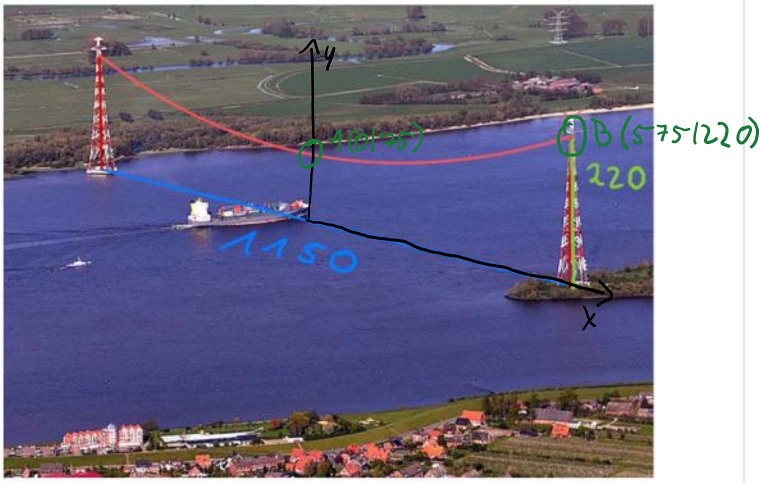
Die zwei Tragmasten der Kreuzung sind 227 m und gelten als die höchsten Freileitungsmasten Europas.

Das Kabel ist in 220 m Höhe befestigt und die Masten stehen 1150 m voneinander entfernt.
Die tiefste Stelle des Kabels befindet sich 75 m über der Wasseroberfläche.

Zeichne ein geeignetes Koordinatensystem ein.

Bestimme die Funktion

$f(x) = ax^2 + b.$



$f(x) = ax^2 + 75$

$f(575) = 220$

$220 = a \cdot 575^2 + 75 \quad | -75$

$145 = a \cdot 575^2 \quad | : 575^2$

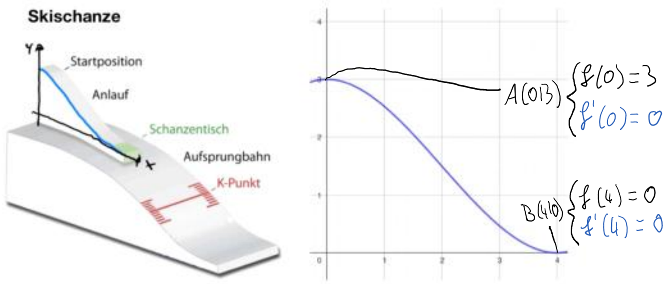
$\frac{145}{575^2} = a$

$0{,}00043856332 = a$

Skischanze

Freitag, 17. Januar 2025 10:00

Hausaufgaben:



$\begin{cases} f(0)=3 \\ f'(0)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} f(4)=0 \\ f'(4)=0 \end{cases}$

1 LE entspricht 10 m in Wirklichkeit.

Der Schanzenverlauf wird durch die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ beschrieben. Ermittle die Koeffizienten a bis d.

Stelle zunächst Bedingungen für den Verlauf auf und übersetze diese in Gleichungen.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$f(4) = 0 \quad a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + 0 \cdot 4 + 3 = 0$

$64a + 16b + 3 = 0$

$f'(4) = 0 \quad 3a \cdot 4^2 + 2b \cdot 4 = 0$

$48a + 8b = 0$

$64a + 16b = -3$

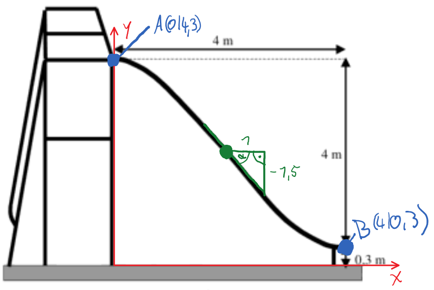
$48a + 8b = 0$

Arbeitsblatt zur Bestimmung von Funktionsgleichungen

Bei der Konstruktion von Metallrutsche müssen TÜV-Vorgaben berücksichtigt werden:

- Der Eintritt und der Auslauf der Rutsche müssen waagerecht verlaufen.
- Die Rutsche darf höchstens 50 cm über dem Boden enden.
- Die Neigung der Rutsche darf nicht mehr als 50° betragen.

Ein Anbieter plant den Bau einer Rutsche mithilfe folgender Konstruktionsskizze. Der Rutschenverlauf soll dabei durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion 3. Grades modelliert werden.



Aufgabe 1: Begründen oder widerlegen Sie, dass die Rutsche den Vorgaben des TÜVs entspricht.

Aufgabe 2: Eine neue Rutsche soll ebenfalls 4 m breit sein, allerdings befindet sich der Eintritt der Rutsche in einer Höhe von 3 m. Die maximale Neigung der Rutsche soll 45° betragen.
Begründen Sie, dass diese Rutsche die Vorgaben des TÜVs berücksichtigt.

Aufgabe 1

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f(0) = 4,3 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 \ldots \boxed{d = 4,3}$

$f'(0) = 0 \Rightarrow 3 \cdot a \cdot 0^2 + 2 \cdot b \cdot 0 + \boxed{c = 0}$

$f(4) = 0,3 \Rightarrow a \cdot 4^3 + b \cdot 4 + 4,3 = 0,3$

$\hookrightarrow 64a + 4b + 4,3 = 0,3$

$f'(4) = 0 \Rightarrow 3 \cdot a \cdot 4^2 + 2 \cdot b \cdot 4 = 0$

$\hookrightarrow 48a + 8b = 0$

TR $\Rightarrow a = \frac{1}{8}, \quad b = -0,75$

$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - 0,75x^2 + 4,3$

$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 1,5x$

$f'(2) = \frac{3}{8} \cdot 2^2 - 1,5 \cdot 2 = 1,5 - 3 = -1,5$

1, α, $-1,5$

$\tan(\alpha) = \frac{-1,5}{1}$

$\alpha \approx 56°$

Aufgabe 2

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f(0) = 3 \Rightarrow d = 3$

$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$f'(2) = -1$

$\boxed{\alpha = 45°, \; 1, \; -1}$

$f'(4) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 4^2 + 2b \cdot 4 = 0$

$\hookrightarrow 48a + 8b$

ProWo: Komplexe Zahlen Einführung

Montag, 27. Januar 2025 09:00

Hausaufgaben:

Rechnen **Komplexe Zahlen**

Formen Sie die folgenden Terme so um, dass die Darstellung so knapp wie möglich ist:

a) $i + 2i + 3i + 4i = 10i$ $\Rightarrow i \cdot i = i^2 = -1 \cdot 2$
b) $i \cdot 2i = -2$
c) $i \cdot 2i \cdot 3i \cdot 4i = 24$
d) $(3i)^2 = -9$ $\Rightarrow 3^2 = 9,\ i^2 = -1$
e) $(\sqrt{3}i)^2 = -3$
f) $(1+i)^2 = 2i$
g) $(1+2i)(3+4i) =$

Rechnen **Komplexe Zahlen**

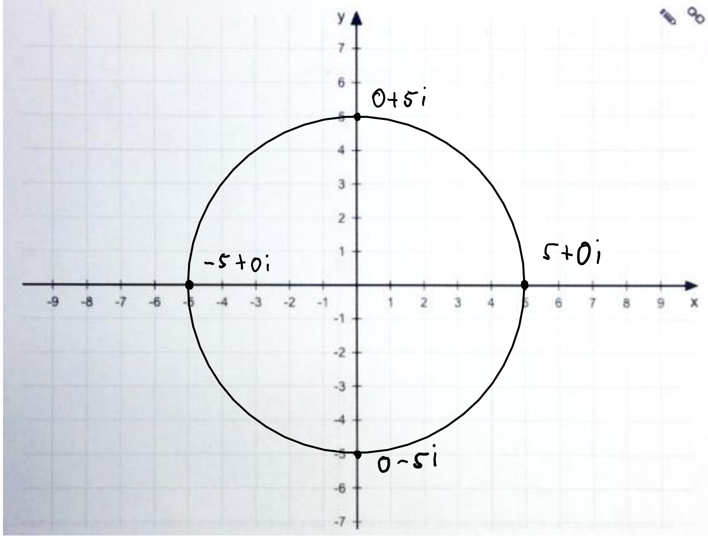
Formen Sie folgende Terme jeweils in die Standardform für komplexe Zahlen $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ um.

a) $(2-5i)+(5+2i) = 7-3i$
b) $(2-5i)-(5+2i) = -3-7i$
c) $(1+i)^4 = 6i^2 = -4$
d) $i + \frac{1}{i}$ Tipp: Erweitern
e) $\frac{1}{1+i}$ Tipp: Erweitern mit $1-i$
f) $\frac{4+5i}{3-4i}$ Tipp: Erweitern mit $3+4i$
g) $\frac{1+i}{1-i}$ Tipp: Erweitern

Zahlenebene **Komplexe Zahlen**

a) Zeichnen Sie in eine Gaußsche Zahlenebene 5 selbst gewählte Punkte ein und geben Sie zu den Punkten jeweils die zugehörige komplexe Zahl an.

b) Geben Sie komplexe Zahlen an, die in der Zahlenebene auf einem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius 5 liegen.



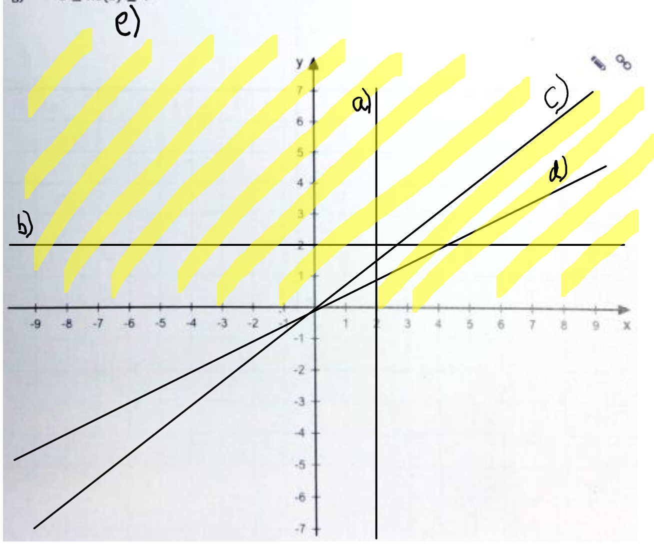
Zahlenebene **Komplexe Zahlen**

Geben Sie Real- und Imaginärteil der folgenden Zahlen an:

a) $-4-2i$ R = -4 i = -2i
b) -3 R = -3
c) $-6i$ i = -6i
d) i i = i

Wo liegen in der Gaußschen Zahlenebene jeweils alle komplexen Zahlen z mit folgender Eigenschaft?

a) Der Realteil ist 2.
b) Der Imaginärteil ist 2.
c) Der Realteil und der Imaginärteil sind gleich.
d) Der Realteil ist das Doppelte des Imaginärteils.
e) $Im(z) > 0$
f) $Re(z) \cdot Im(z) < 0$
g) $3 \le Re(z) \le 4$



Wenn man reelle Zahlen als Vektoren darstellt, dann kann man damit auch das Addieren und Subtrahieren illustrieren. Beim Addieren hängt man Pfeile aneinander. Beispielsweise bedeutet die Summe $4 + 2$, dass man an einen Pfeil für 4 einen Pfeil für 2 anhängt. Beide zusammen ergeben einen Pfeil für 6.

Dieses Konzept lässt sich auf komplexe Zahlen übertragen.

4.2 Addition von Vektoren in der Zahlenebene

Wir betrachten als Beispiel zwei komplexe Zahlen, sie sind in der Skizze unten als Punkte und Vektoren dargestellt:

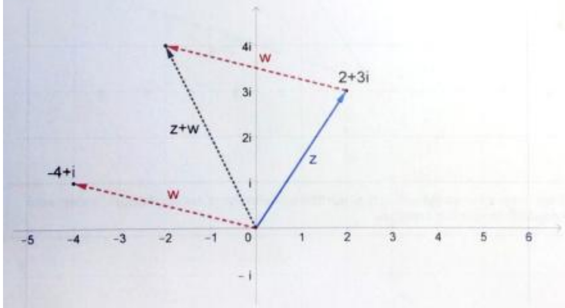
$z = 2 + 3i$
$w = -4 + i$

Die Summe ist:

$z + w = (2 + 3i) + (-4 + i) = (2 - 4) + (3 + 1)i = -2 + 4i$

Der Realteil von $z + w$ ist also die Summe der Realteile von z und von w. Ebenso ist der Imaginärteil von $z + w$ die Summe der Imaginärteile von z und von w.

Die Addition von komplexen Zahlen erfolgt damit in gleicher Weise wie die Addition von Vektoren in der Geometrie.
Die folgende Abbildung illustriert dies für $z + w$: Man zeichnet an die Spitze eines Pfeils von z den Anfang eines Pfeils von w. Zur Summe $z + w$ gehört dann ein Pfeil, der vom Anfang des Pfeils von z zur Spitze des Pfeils von w geht.



Die Addition zweier komplexer Zahlen entspricht der Addition der zugehörigen Vektoren.

Wir betrachten wieder als Beispiel die zwei Zahlen aus dem vorhergehenden Abschnitt:

$z = 2 + 3i$
$w = -4 + i$

Die Differenz ist:

$z - w = (2 + 3i) - (-4 + i) = (2 - (-4)) + (3 - 1)i = 6 + 2i$

Der Realteil von $z - w$ ist also die Differenz der Realteile von z und von w. Ebenso ist der Imaginärteil von $z - w$ die Differenz der Imaginärteile von z und von w.

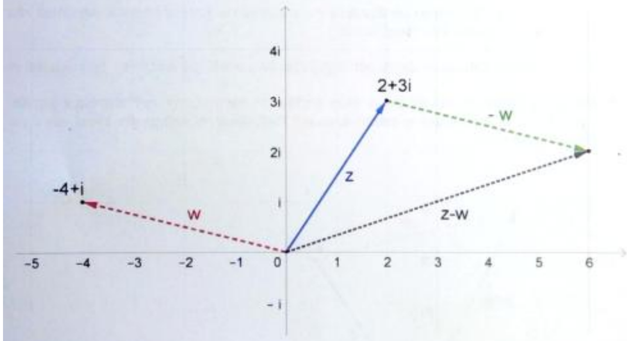
Die Subtraktion von komplexen Zahlen erfolgt damit in gleicher Weise wie die Subtraktion von Vektoren in der Geometrie.

Alternativ können wir die Differenz $z - w$ auch als Summe auffassen: $z - w = z + (-w)$

Der Vektor $-w = 4 - i$ ist gleich lang wie der Vektor w und zeigt in die genau entgegengesetzte Richtung. Er heißt *Gegenvektor* zu w.

Statt w zu subtrahieren, kann man auch $-w$ addieren. Die folgende Abbildung illustriert dies:

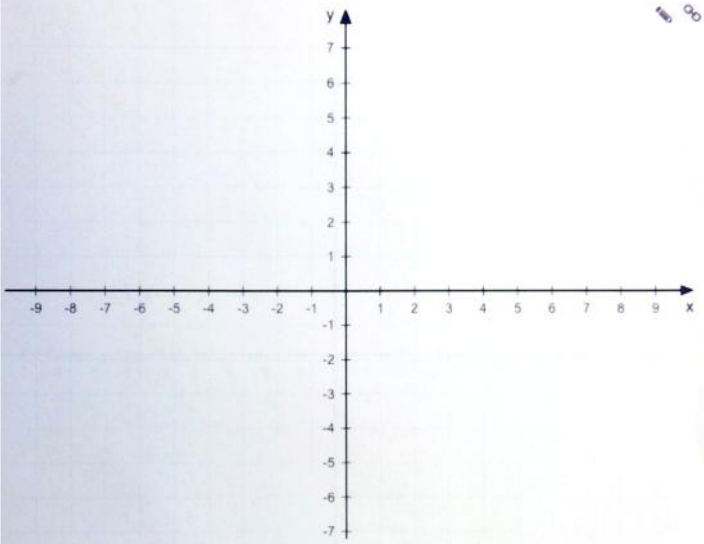
$z - w = z + (-w) = 2 + 3i + 4 - i = 6 + 2i.$



Die Subtraktion einer komplexen Zahl entspricht der Subtraktion des zugehörigen Vektors oder auch der Addition des Gegenvektors.

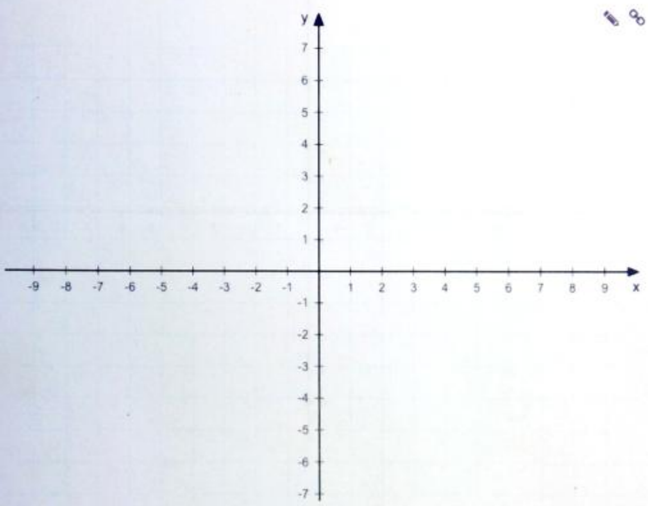
Bestimmen Sie die folgenden Summen und Differenzen geometrisch durch Verknüpfen von Vektoren:

a) $(3 + 2i) + (-1 + 3i)$
b) $(1 + i) + (-1 + i) + (-1 - i) + (1 - i)$



c) $(3 + 2i) - (-1 + 3i)$
d) $(1 + i) - (-1 + i) - (-1 - i) + (1 - i)$

Überlegen Sie sich weitere solche Beispiele.



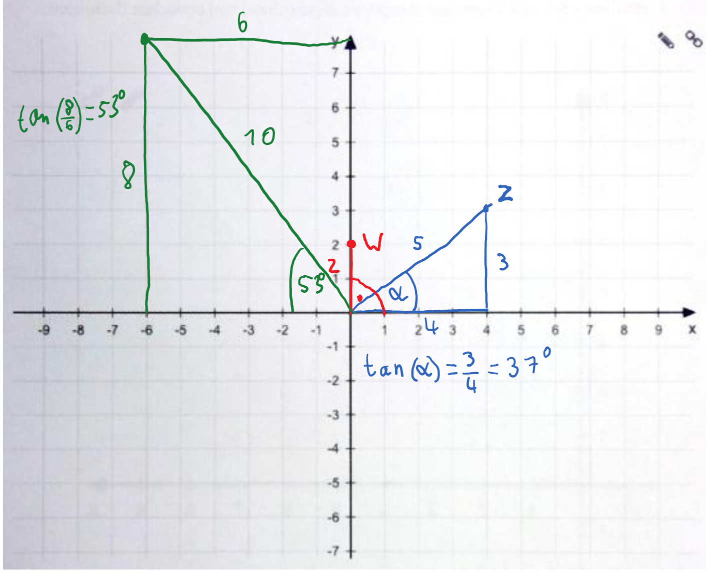
Multiplikation **Komplexe Zahlen**

$8i + 6i^2 \Rightarrow 8i - 6$

a) Zeichnen Sie die Zahlen z = 4 + 3i und w = 2i ein und bestimmen Sie z * w.

b) Geben Sie auch die Beträge und Winkel an!

c) Formulieren Sie eine Regel und überprüfen diese anhand von einfachen Beispielen

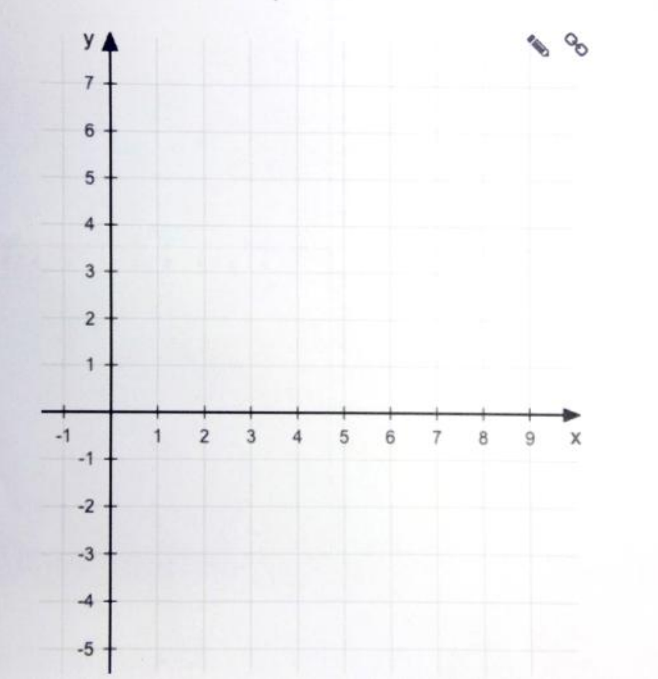


Multiplikation **Komplexe Zahlen**

a) Zeichnen Sie die Zahlen z = 3 + 4i und die z konjugierte Zahl $\bar{z}$ ein

b) Berechnen Sie $w = \frac{1}{z}$. Geben Sie auch die Beträge und Winkel an!

c) Formulieren Sie eine Regel und überprüfen diese anhand von einfachen Beispielen.



ProWo: Komplexe Zahlen

Dienstag, 28. Januar 2025 09:00

Komplexe Zahlen

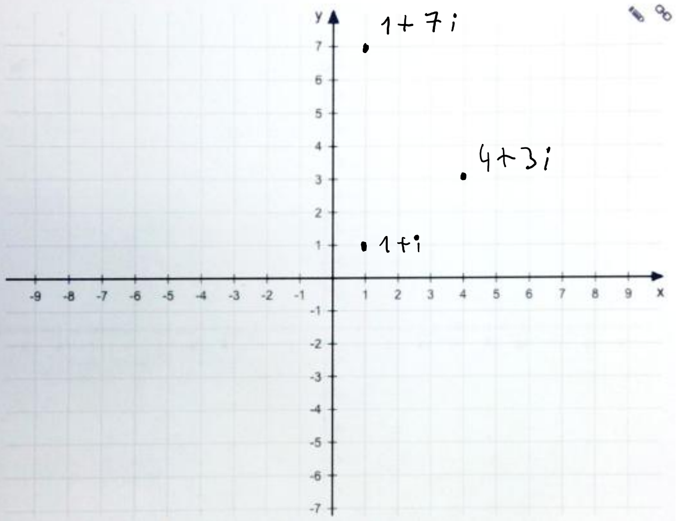
Multiplikation

$(4+3i)\cdot(1+i) = 4+4i+3i+3i^2$

$= 4+7i+3i^2$

$= 4+7i-3$

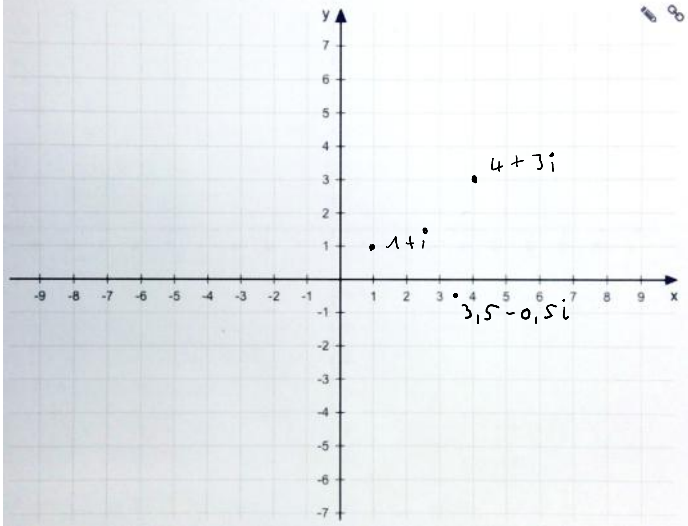
$= 1+7i$



Komplexe Zahlen

Division

$(4+3i):(1+i) = \frac{(4+3i)}{(1+i)} = \frac{4+3i}{1+1i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{4+3i-4i-3i^2}{2} = \frac{7-i}{2} = 3{,}5-0{,}5i$



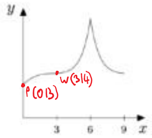
Notre-Dame

Freitag, 31. Januar 2025 10:00

Hausaufgaben:

Notre-Dame

Im Jahr 2019 zerstörte ein Großbrand das Dach der Kathedrale Notre-Dame de Paris. Eine der vielen Ideen für den geplanten Wiederaufbau sieht die Errichtung eines Glasdachs mit einem gläsernen Turm darauf vor.



In einem geeigneten Koordinatensystem wird der Dachfirst mit Hilfe von Funktionsgraphen modelliert. Die Funktionswerte geben die Höhe des Dachfirsts über dem Boden an; die x-Achse beschreibt das Bodenniveau. Dabei entspricht eine Längeneinheit $10\,\mathrm{m}$ in der Wirklichkeit.

a) Zunächst wird eine ganzrationale Funktion f dritten Grades betrachtet. Der Graph von f verläuft durch die beiden Punkte $P(0\,|\,3)$ und $W(3\,|\,4)$. Dabei ist W ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente. Mit Hilfe des Graphen von f wird über dem Intervall $[0; 3]$ ein erstes Teilstück des Dachfirsts modelliert.

a1) Leiten Sie einen Funktionsterm von f her. (6 P)
[*Kontrolle:* $f(x) = \frac{1}{27}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + x + 3$]

a2) Berechnen Sie die Höhe des Dachfirsts über dem Boden an der Stelle $x = 1$. (2 P)

a3) Geben Sie einen Funktionsterm der Ableitungsfunktion f' und die Steigung des Graphen von f an der Stelle $x = 0$ an. (2 P)

a1)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

I $f(0) = 3 \Rightarrow d = 3$

II $f(3) = 4 \Rightarrow a3^3 + b3^2 + c3 + 3 = 4$ $\quad 27a + 9b + 3c + 3 = 4$

III $f'(3) = 0 \Rightarrow 3\cdot a\cdot 3^2 + 2\cdot b\cdot 3 + c = 0$ $\quad 27a + 6b + c = 0$

IV $f''(3) = 0 \Rightarrow 6\cdot a\cdot 3 + 2\cdot b = 0$ $\quad 18a + 2b = 0$

TR $\Rightarrow x = \frac{1}{27}$ $\quad y = -\frac{1}{3}$ $\quad z = 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{1}{27}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + x + 3}}$

a2) $= 3{,}\overline{703}$

a3) $f'(x) = \frac{1}{27}\cdot 3\cdot x^2 - \frac{1}{3}\cdot 2\cdot x + 1$

$f'(0) = 1$

Latte-Macchiato

Dienstag, 4. Februar 2025 10:30

Hausaufgaben:

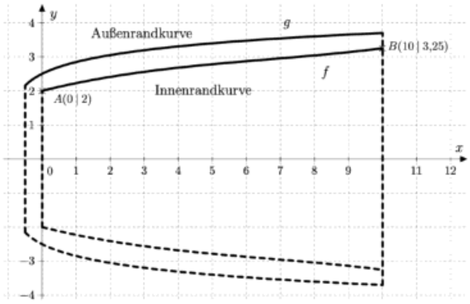
Latte-Macchiato-Glas

Bei der Bearbeitung der Aufgabe dürfen alle Funktionen des Taschenrechners genutzt werden.

Aufgabe 1: Analysis

Ein Hersteller eines massiven Latte-Macchiato-Glases möchte vor Beginn der Produktion die Form des Glases modellieren. Die Abbildung zeigt das Modell eines Glases im Längsschnitt. Eine Einheit entspricht einem Zentimeter in der Wirklichkeit.

a) Die Form der Innenrandkurve des liegenden Glases kann im Intervall $[0\,;\,10]$ durch eine ganzrationale Funktion f dritten Grades beschrieben werden. Der Graph der Funktion f hat im Punkt $A(0\mid 2)$ die Steigung $0{,}25$ und im Punkt $B(10\mid 3{,}25)$ die Steigung $0{,}125$.



- Leiten Sie eine Funktionsgleichung von f her.

  [Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{800}x^3 - \frac{1}{40}x^2 + \frac{1}{4}x + 2$]

- Zeigen Sie, dass die Funktion f nicht nur auf dem Intervall $[0\,;\,10]$ sondern sogar auf ganz $\mathbb{R}$ kein lokales Minimum besitzt.

- Erfahrungswerte zeigen, dass ein Einfüllen von Milch in das aufrecht stehende Glas bis zum Wendepunkt W des Graphen der Funktion f zu einem guten Mischungsverhältnis für Latte-Macchiato führt.
  Berechnen Sie die Koordinaten von W und geben Sie die zugehörige Füllhöhe h der Milch über dem Innenboden des Glases an.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

I $f(0) = 2$ $\Rightarrow d = 2$

II $f(10) = 3{,}25$ $\Rightarrow a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 2 = 3{,}25$ $\Rightarrow 1000a + 100b = -1{,}25$

III $f'(0) = 0{,}25$ $\Rightarrow c = 0{,}25$

IV $f'(10) = 0{,}125$ $\Rightarrow 3 \cdot a \cdot 10^2 + 2 \cdot b \cdot 10 + 0{,}25 = 0{,}125$ $\Rightarrow 300a + 20b = -0{,}125$

TR $\Rightarrow x = \frac{1}{800}$ $y = -\frac{1}{40}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{800}x^3 - \frac{1}{40}x^2 + \frac{1}{4}x + 2$

$f'(x) = \frac{3}{800}x^2 - \frac{2}{40}x + \frac{1}{4} \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow$ keine Lösung

Cola-Glas

Dienstag, 11. Februar 2025 10:00

Hausaufgaben:

Cola-Glas

Modellierung eines Glases:

Finde eine Funktion, die das Profil des Colaglases näherungsweise beschreibt.

Bildet dazu 3-4er Gruppen.

Wählt selbst einen geeigneten Ansatz und überlegt euch gemeinsam ein Vorgehen.

Hinweis: Wählt ein geeignetes Koordinatensystem

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

I $f(0) = 29{,}25 \Rightarrow d = 29{,}25$

II $f(39) = 26 \Rightarrow a \cdot 39^3 + b \cdot 39^2 + c \cdot 39 + 29{,}25 = 26 \Rightarrow 59319a + 1521b + 39c = -3{,}25$

III $f(145) = 38 \Rightarrow a \cdot 145^3 + b \cdot 145^2 + c \cdot 145 + 29{,}25 = 38 \Rightarrow 3048625a + 21025b + 145c = 8{,}75$

IV $f'(39) = 0 \Rightarrow 3 \cdot a \cdot 39^2 + 2 \cdot b \cdot 39 + c = 0 \Rightarrow 4563a + 78b + c = 0$

TR $\Rightarrow$ $x = -0{,}00000737073$

$y = 0{,}00271166937$

$z = -0{,}1778775529$

f(x)=-0,00000737073*x^3+0,00271166973*x^2-0,1778775529*x+29,25

GeoGebra (Punkt anstatt Komma):
f(x)=-0.00000737073*x^3+0.00271166973*x^2-0.1778775529*x+29.25

Vektoren

Freitag, 14. Februar 2025 10:00

Hausaufgaben:

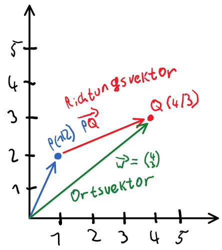
Vektor (Verschiebung)

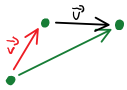
Schreibweise: $\vec{v} = \binom{3}{1}$

$\vec{v} = \binom{3}{1} = \binom{x\text{-Konstante}}{y\text{-Konstante}}$ $\quad \vec{u} = \binom{1}{2}$

$\overrightarrow{PQ}\ \binom{3}{1}$ $\quad \vec{w} = \binom{4}{3}$

Richtungsvektoren $\quad$ Ortsvektoren



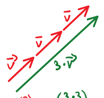


$\vec{v} + \vec{u}$

$\binom{3}{1} + \binom{1}{2} = \binom{3+1}{1+2} = \binom{4}{3}$

$\vec{v} + \vec{u} = \vec{w}$

$\binom{v_1}{v_2} + \binom{u_1}{u_2} = \binom{v_1+u_1}{v_2+u_2}$



$3 \cdot \binom{3}{1} = \binom{3\cdot 3}{3\cdot 1} = \binom{9}{3}$

Skalar

$k \cdot \binom{v_1}{v_2} = \binom{k\cdot v_1}{k\cdot v_2}$

Rechnen mit Verschiebungen (Vektoren)

Bestimmen Sie das Ergebnis des gegebenen Rechenausdrucks als Spaltenvektor.

a) $-\vec{a} + \vec{e}$ $\quad -\binom{1}{2} + \binom{3}{2} = \binom{2}{0}$

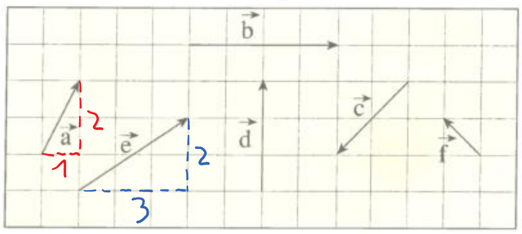
b) $\vec{d} - \vec{b}$

c) $3\vec{a} + 2\vec{c} + \vec{d}$

d) $2(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} - \vec{c}) - 2\vec{b}$

e) $\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{a}$

f) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{d} + 3\vec{f}$



Prüfen Sie, ob die angegebene Gleichung richtig ist.

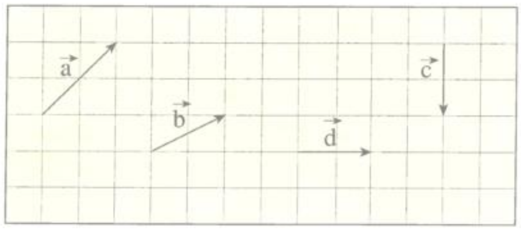
a) $\vec{a} + 2\vec{b} = 3\vec{d} - 2\vec{c}$

b) $\vec{a} - \vec{c} = \vec{d} - 3\vec{c}$

c) $\vec{a} - \vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{c}$

d) $2\vec{d} - (\vec{c} - \vec{a}) = \vec{0}$

e) $\vec{a} + 2\vec{d} = 2\vec{b} + \vec{d}$



Aufgaben

1. $-\binom{1}{2} + \binom{3}{2} = \binom{2}{0}$
2. $\binom{0}{3} - \binom{4}{0} = \binom{-4}{3}$
3. $3\binom{1}{2} + 2\binom{-2}{-2} + \binom{0}{3} = \binom{-1}{5}$

Aufgaben

1. $\binom{2}{2} + 2\binom{2}{1} \neq 3\binom{2}{0} - 2\binom{0}{2}$
2. $\binom{2}{2} - \binom{0}{-2} =? \binom{2}{0} - 3\binom{0}{-2}$
3. $\binom{2}{2} - \binom{2}{1} =? -\frac{1}{2}\binom{0}{-2}$

Vektoren II - Schiffsrouten

Dienstag, 18. Februar 2025 10:00

Hausaufgaben:

Herleitung von Schiffsrouten

1. Das Passagierschiff „Lousiana" fährt mit einer gleich bleibenden Geschwindigkeit und Richtung über den Ozean.
   Um 0 Uhr befindet sich das Schiff am Punkt $S_0(-3|-2)$. Es bewegt sich in einer Stunde um 4 Seemeilen nach Westen und um 1 Seemeile nach Norden.
   a) Geben Sie die Schiffsroute des Passagierschiffs an.
   b) An welchem Punkt wird es sich um 3 Uhr desselben Tages befinden? Wo befand es sich um 20 Uhr des vorangegangenen Tages?
   c) Fährt das Schiff durch den Punkt mit den Koordinaten $P(-23|3)$?

2. Ein Öltanker fährt mit einer gleich bleibenden Geschwindigkeit und Richtung über den Ozean.
   Um 0 Uhr befindet sich das Schiff am Punkt $S_0(2|5)$, um 1 Uhr am Punkt $S_1(3|2)$.
   a) Berechnen Sie die Schiffsroute des Tankers.
   b) Fährt das Schiff durch die Punkte mit den Koordinaten $P(-5|-4)$ bzw. $Q(-2|17)$? Wenn ja, zu welchem Zeitpunkt?

3. Ein Frachter fährt mit einer gleich bleibenden Geschwindigkeit und Richtung über den Ozean.
   Um 0 Uhr befindet sich das Schiff am Punkt $S_0(5|-3)$, um 1 Uhr am Punkt $S_1(2|0)$.
   a) Berechnen Sie die Schiffsroute des Frachters.
   b) Fährt das Schiff durch die Punkte mit den Koordinaten $P(2|7)$ bzw. $Q(-4|6)$? Wenn ja, zu welchem Zeitpunkt?

4. Ein Schiff, das mit einem gleich bleibenden Geschwindigkeit und Richtung über den Ozean fährt, befindet sich um 0 Uhr am Punkt $S_0(4|3)$ und um 2 Uhr am Punkt $S_2(-8|7)$.
   Berechnen Sie die Schiffsroute.

a) $\overrightarrow{S_0S_1} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -6 \end{pmatrix}$

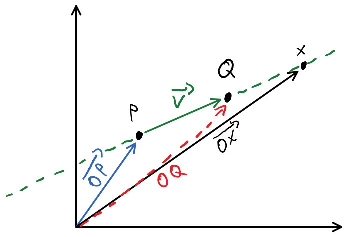
c) Ja

2a) $\overrightarrow{S_0S_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) nein; Ja, 20 Uhr

3a) $\overrightarrow{S_0S_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) nein; ja 4 Uhr



$\vec{v} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

$= \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v}$

A(2|7), eine Stunde später in B(5|4)

a) Schiffsroute angeben
b) P(8|3) erreichen?
c) Stecke in einer Stunde

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

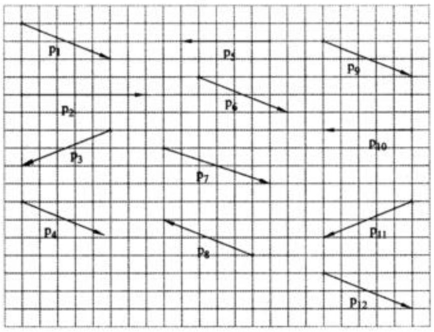
$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ $8 = 2 + t \cdot 3$ ✓ $t = 2$

c) $\sqrt{18} \approx 4{,}24$

Vektorzüge

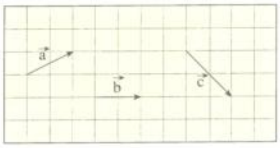
1. a) Die Pfeile p_1 und p_4 repräsentieren denselben Vektor $\vec{v}$. Gibt es weitere Pfeile, die den Vektor $\vec{v}$ repräsentieren? Benennen Sie diese!



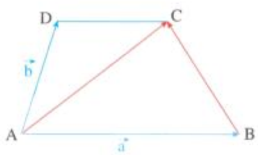
b) Gibt es weitere Pfeile, die ein und denselben Vektor repräsentieren? Benennen Sie diese!

c) Wie viele Repräsentanten kann man für einen Vektor zeichnen?

Beispiel: Addition durch Vektorzug
Gegeben sind die rechts dargestellten Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.
Konstruieren Sie zeichnerisch den Vektor $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b} + 1{,}5\vec{c}$. Führen Sie eine rechnerische Ergebniskontrolle durch.



Beispiel: Vektoren im Trapez
Ein achsensymmetrisches Trapez wird durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt. Die Decklinie des Trapezes ist halb so lang wie die Grundlinie.
Stellen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$ mithilfe der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.



Vektoren III - Flugrouten

Freitag, 21. Februar 2025 10:00

Hausaufgaben:

Arbeitsbogen: Alarmzustand am Flughafen?

Bei der Flugsicherung des Hamburger Flughafens herrscht Aufregung. Roger R., Praktikant und Schüler der 11. Klasse eines Gymnasiums in der Umgebung, hat den Verdacht, dass zwei Flugzeuge vor einer Kollision stehen!

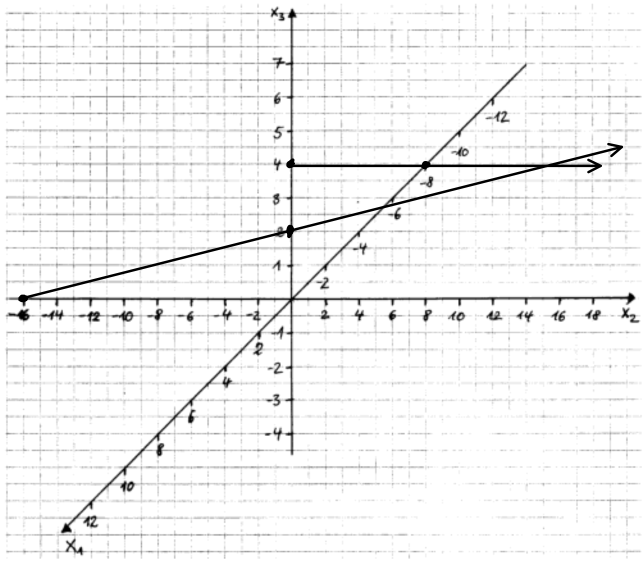
Was war passiert?
Roger sah auf dem Bildschirm eines Überwachungscomputers die Positionen der Flüge LH012 und AY851, die vor einigen Minuten abgeflogen waren. Er hatte im Mathematik-Unterricht gut aufgepasst und beurteilte die entstandene Situation als äußerst kritisch. Die beiden Flugzeuge flogen auf einer geraden Bahn und bewegten sich mit konstanter Geschwindigkeit nach Roger's Einschätzung musste eine Kollision stattfinden. Die Zeiten und Positionen der Flüge notierte Roger in einer Tabelle:

Flug	Zeit	Position	Flug	Zeit	Position
LH012	09:06	A (0| - 16|0)	AY851	09:09	C (12|0|4)
	09:10	B (0|0|2)		09:11	D (6|8|4)

Roger meldet nun seine Beobachtung dem zuständigen Fluglotsen. Wie wird der wohl auf die Meldung reagieren? Bewahrt er die Ruhe und macht erst einmal eine Pause oder muss er eine „Airprox" (Aircraft Proximity) melden und schnellstmöglich ein Ausweichmanöver der Flugzeuge einleiten?

Begründen Sie Ihre Einschätzung. Gehen Sie wie folgt vor:

1. Zeichnen Sie die Flugbahnen der beiden Flugzeuge in nebenstehendes Koordinatensystem.
2. Bestimmen Sie die Positionen beider Flugzeuge zu jeder vollen Minute zwischen 09:06 und 09:11. Markieren Sie die Punkte in der Zeichnung tragen Sie die Koordinaten in die Tabelle ein.
3. Bestimmen Sie die Gleichungen g und h der Flugbahnen. Überprüfen Sie unter Annahme gleichbleibender Bewegungsrichtung und Geschwindigkeit der Flugzeuge, ob eine Kollision stattfindet.



Flug	Zeit	Position	Flug	Zeit	Position
LH012	09:06	A(0| - 16|0)	AY851	09:06	27|−12|4
	09:07	0|−12|0,5		09:07	18|−8|4
	09:08	0|−8|1		09:08	15|−4|4
	09:09	0|−4|1		09:09	C (12|0|4)
	09:10	B (0|0|2)		09:10	9|4|4
	09:11	0 |4|2,5		09:11	D (6|8|4)

Beim Funkmessverfahren (Radar) bestimmt man aus der Richtung und der Laufzeit elektromagnetischer Impulse den Ort von Flugzeugen, bezogen auf den Standort der Sende- und Empfangsantenne.
Gemessene Objekte erscheinen auf dem Radarschirm als leuchtende Punkte.
Mithilfe mehrerer Messungen lassen sich die Bahnen von Flugzeugen erfassen.
Um die Bahn eines bewegten Objektes anzuzeigen, muss diese zuvor aus Messdaten errechnet werden.
Wir beschränken uns auf geradlinige Bahnen.
Unser Ziel ist die Beschreibung beliebiger Geraden im Raum mithilfe von Vektoren.

---

1 Ein Flugzeug wird bezüglich eines Koordinatensystems mit der Einheit 1 km von einer Radarstation im Punkt P(2|5|2) geortet. Eine Minute später befindet es sich im Punkt Q(12|−7|3). Wir setzen voraus, dass das Flugzeug seine Richtung und Geschwindigkeit nicht ändert.

a) Wo befindet es sich 3 Minuten nach Beobachtungsbeginn, wenn das Flugzeug in dieser Zeit seine Richtung und Geschwindigkeit beibehält?

b) Untersuchen Sie, wo sich das Flugzeug eine halbe Minute *vor* Beobachtungsbeginn befand, wenn sich seine Richtung und Geschwindigkeit in dieser Zeit nicht geändert haben.

c) Später wird das Flugzeug noch in den Punkten A(82|−91|10) und B(102|−115|18) geortet. Hat das Flugzeug seine Richtung beibehalten?

$$\begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}12\\-7\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-12\\1\end{pmatrix}$$

a) $$\begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}10\\-12\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}32\\-31\\5\end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix} - 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix}10\\-12\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\11\\2{,}5\end{pmatrix}$$

Klausurvorbereitung

Dienstag, 25. Februar 2025 10:00

Hausaufgaben:

Aufgaben: 3, 4, 6, 7

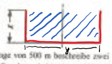
Aufgaben zur Klausurvorbereitung
(Kurvendiskussion, Extremwertprobleme, Modellieren mit Funktionen)

① Untersuchen Sie die Funktion f mit $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$ auf ihre Nullstellen und Schnittpunkte mit der y-Achse sowie ihre Extrem- und Wendepunkte.
Skizzieren Sie aus Ihren Ergebnissen das Schaubild dieser Funktion.

② Untersuchen Sie die Funktion g mit $g(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ auf ihre Nullstellen und Schnittpunkte mit der y-Achse sowie ihre Extrem- und Wendepunkte.
Skizzieren Sie aus Ihren Ergebnissen das Schaubild dieser Funktion.

③ Die Geschicklichkeit von Motorradfahrern zeigt sich besonders in den Kurven. Aber auch zwischen den Kurven kommt es darauf an, die richtige Stelle zum Wechsel der Kurvenlage zu erwischen.
a) Ermitteln Sie, an welchen Stellen ein Motorradfahrer seine Kurvenlage wechseln muss, wenn sich der Verlauf eines Rennkurses innerhalb gewisser Grenzen durch die Funktion $f(x) = -0{,}05x^4 + 1{,}2x^2 + 2$ beschreiben lässt.
b) Berechnen Sie, an welchen Stellen der Rennfahrer mit der geringsten Geschwindigkeit fährt.

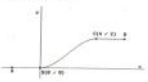
④ Aus einem Blech von 1 m Breite ist eine Regenrinne mit einem rechteckigen Profil zu formen, sodass sie eine maximale Wassermenge aufnehmen kann. Ermitteln Sie, wie groß dafür x zu wählen ist.



⑤ Eine Radrennbahn soll neu gebaut werden. Die Bahn mit einer Länge von 500 m beschreibe zwei kongruente Halbkreise, die durch zwei gleich lange, zueinander parallele Strecken miteinander verbunden sind. (Eine Skizze könnte hier ganz hilfreich sein.)
Unterbreiten Sie einen rechnerisch begründeten Bauvorschlag, der eine möglichst große rechteckige Nutzfläche im Inneren der Bahn für Veranstaltungen zulässt.

⑥ Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat einen Extremwert in E (– 1 ; 4) und schneidet in N (– 2 ; 0) mit der Steigung m = 9 die x-Achse. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Funktion.

⑦ Beim Bau einer Go-Kart-Bahn sollen zwei parallele gerade Teilstücke der Fahrbahn ([AB] und [CD]) mittels einer s-förmigen Kurve, die zwischen den beiden Fahrbahnteilen dem Graphen einer ganzrationalen Funktion 3. Grades entspricht, ohne Knick in B und C verbunden werden. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Funktion.



① $S_y(0;1)$, $x_{01} = 1$, $x_{02} = -1$, $x_{03} = 0{,}707$, $x_{04} = -0{,}707$, H (0 ; 1), T_1 (0,866 ; –0,125), T_2 (–0,866 ; –0,125), W_1 (0,5 ; 0,375), W_2 (–0,5 ; 0,375)
② $S_y(0;8)$, $x_{01} = 2$, $x_{02} = 1$, $x_{03} = -4$, H (–2,189 ; 24,193), T (1,523 ; –1,378), W (–0,333 ; 11,407)
③ a) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, b) $x_1 = 0$, $x_2 = 3{,}464$, $x_3 = -3{,}464$ ④ x = 0,25 m ⑤ r = 39,8 m und l = 125 m
⑥ $f(x) = x^3 - 3x + 2$
⑦ $f(x) = -\frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{8}x^2$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f(0) = 0 \quad a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0$
$0a + 0b + 0c + 0 = 0$
$f'(0) = 0 \quad 3 \cdot a \cdot 0^2 + 2 \cdot b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$
$0a + 0b = 0$
$f(4) = 2 \quad a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 = 2$
$64a + 16b = 2$
$f'(4) = 0 \quad 3 \cdot a \cdot 4^2 + 2 \cdot b \cdot 4^2 = 0$
$48a + 32b = 0$

$f(0) = 0 \quad a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0$
$0a + 0b + 0c + 0 = 0$
$f(4) = 2 \quad a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 = 2$
$64a + 16b + 4c = 2$
$f(2) = 1 \quad a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 = 1$
$16a + 4b + 2c = 1$
$f''(2) = 0 \quad 6 \cdot a \cdot 2 + 2 \cdot b = 0$
$12a + 2b = 0$

$f(x) = -0{,}05x^4 + 1{,}2x^2 + 2$
$f''(x) = -0{,}6x^2 + 2{,}4 \overset{!}{=} 0 \quad | -2{,}4$
$-0{,}6x^2 = -2{,}4 \quad | : (-0{,}6)$
$x^2 = 4 \quad | \sqrt{\dots}$
$x = \mp 2$

$f'(x) = -0{,}2x^3 + 2{,}4x = 0 \quad | -2{,}4x$
$-0{,}2x^3 = -2{,}4x \quad | : -0{,}2$
$x^3 = 12x \quad | : x$
$x^2 = 12 \quad | \sqrt{\dots}$
$x = \mp 12$

Zielfunktion:
$A(x,y) = x \cdot y$
Nebenbedingung:
$U = 1 = 2x + y \Longrightarrow y = 1 - 2x$

$A(x) = x \cdot (1 - 2x) = \boxed{x} - 2x^2$
$A'(x) = \boxed{1} - 4x \overset{!}{=} 0$

x wird zur 1, weil es eigentlich x^1 ist und das zu $1x^0$ wird, das heißt, dass das x wegfällt und nur noch die 1 stehen bleibt.

$1 - 4x = 0$
$4x = 1$
$x = 0{,}25$

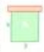
$A(x,y) = x \cdot y$
$U = 20 = 2x + y \Rightarrow y = 20 - 2x$
$A(x) = x \cdot (20 - 2x) = 20x - 2x^2$
$A'(x) = 20 - 4x \overset{!}{=} 0 \quad | -20$
$-4x = -20 \quad | : -4$
$x = 5$

Nr. 6

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f(-1) = 4 \quad a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = 4$
$-a + b - c + d = 4$
$f'(-1) = 0 \quad 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) + c = 0$
$3a - 2b + c = 0$
$f(-2) = 0 \quad a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) + d = 0$
$-8a + 4b - 2c + d = 0$
$f'(-2) = 9 \quad 3a \cdot (-2)^2 + 2b \cdot (-2) + c = 9$
$12a - 4b + c = 9$

Lösungsprinzip **Extremalproblem**

1. Problemstellung	Verständnis der Problemstellung, Anfertigung einer Planskizze, Einführung geeigneter Bezeichnungen.	Mit einem Seil der Länge 20 m soll an einer Mauer ein rechteckiges Areal **maximaler** Fläche abgegrenzt werden. 
2. Aufstellen der Hauptbedingung	Die zu optimierende Größe A wird in Abhängigkeit von einer oder mehreren Variablen dargestellt, hier x und y.	Fläche = Länge × Breite $\mathbf{A(x, y) = x \cdot y}$
3. Aufstellen der Nebenbedingung	Zwischen den in der Hauptbedingung vorkommenden Variablen x und y wird eine Beziehung hergestellt. Hilfsmittel: Planskizzen, Flächen-, Volumenformeln, geom. Sätze (Pythagoras, Strahlensatz) usw.	Seillänge = 20 m $\mathbf{y + 2x = 20}$
4. Aufstellen der Zielfunktion	Die Nebenbedingung wird nach einer der beiden Variablen x, y aufgelöst. Das Ergebnis wird in die Hauptbedingung eingesetzt. So erreicht man, dass die zu optimierende Größe A nur noch von einer Variablen abhängt.	$2x + y = 20$ $y = 20 - 2x$ $A = x \cdot (20 - 2x)$ $\mathbf{A(x) = -2x^2 + 20x}$
5. Bestimmen des Optimums der Zielfunktion	Durch Nullsetzen der Ableitung der Zielfunktion werden die lokalen Extrema der Zielfunktion bestimmt. Gegebenenfalls werden die Funktionswerte an den Randstellen des zulässigen Bereichs mit einbezogen. Durch direkten Vergleich wird festgestellt, welcher dieser Extrem- bzw. Randwerte das gesuchte Optimum darstellt.	$A'(x) = -4x + 20 \overset{!}{=} 0$ Auflösen: $\mathbf{x = 5}$ Einsetzen: $\mathbf{y = 10}$ Einsetzen: $\mathbf{A_{max} = 50}$ **Resultat:** Das optimale Rechteck ist doppelt so lang wie breit und hat einen maximalen Flächeninhalt von 50 m^2.

Rekonstruktion Lösungsprinzip

Beispiel: Gesucht ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit dem Wendepunkt W(–2|6), die an der Stelle x = –4 ein Maximum hat. Außerdem ist die Steigung der Wendetangente (Tangente im Wendepunkt) bekannt. Sie ist gleich –12.

Lösung:
(1) Ansatz für die Funktionsgleichung
Wir setzen die ganzrationale Funktion dritten Grades unter Verwendung der Parameter a, b, c und d allgemein an. Außerdem notieren wir die Funktionsterme von f' und f''.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$

(2) Eigenschaften der Funktion f
1. Wendepunkt W(–2|6)
(Wendestelle x = –2, Funktionswert y = 6)
2. Maximum bei x = –4
3. Steigung im Wendepunkt: –12

(3) Umsetzen der Eigenschaften in Gleichungen
1. $f(-2) = 6$ $\quad -8a + 4b - 2c + d = 6$
$f''(-2) = 0$ $\quad -12a + 2b = 0$
2. $f'(-4) = 0$ $\quad 48a - 8b + c = 0$
3. $f'(-2) = -12$ $\quad 12a - 4b + c = -12$

(4) Lösen des Gleichungssystems

I: $-8a + 4b - 2c + d = 6$
II: $-12a + 2b = 0$ $\quad$ 2·II → V: $-24a + 4b = 0$
III: $48a - 8b + c = 0$
IV: $12a - 4b + c = -12$ $\quad$ III – IV → VI: $36a - 4b = 12$
V + VI → VII: $12a = 12$, $a = 1$ $\quad$ in II: $b = 6$ $\quad$ in III: $c = 0$ $\quad$ in IV: $d = -10$

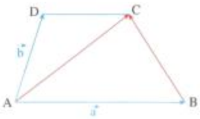
(5) Resultat
$f(x) = x^3 + 6x^2 - 10$ hat die geforderten Eigenschaften, was man leicht überprüfen kann.

Klausurvorbereitung II - Vektoren

Dienstag, 4. März 2025 10:00

Hausaufgaben:

Beispiel: Vektoren im Trapez
Ein achsensymmetrisches Trapez wird durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt. Die Decklinie des Trapezes ist halb so lang wie die Grundlinie. Stellen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$ mithilfe der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.



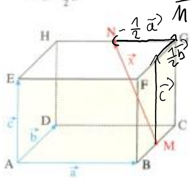
Lösung:
Wir arbeiten zur Darstellung mit Vektorzügen, die $\vec{a}$ und $\vec{b}$ enthalten. Dabei beachten wir, dass $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\vec{a}$ gilt, denn $\overrightarrow{DC}$ ist parallel zu $\vec{a}$ und halb so lang.
Die Rechenwege und Resultate sind rechts aufgeführt.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \tfrac{1}{2}\vec{a}$$

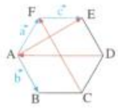
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = -\vec{a} + \vec{b} + \tfrac{1}{2}\vec{a} = \vec{b} - \tfrac{1}{2}\vec{a}$$

Übung 14 Vektoren im Quader
Der abgebildete Quader wird durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt. Der Vektor $\vec{x}$ verbindet die Mittelpunkte M und N zweier Quaderkanten.
Stellen Sie den Vektor $\vec{x}$ mithilfe der aufspannenden Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

$\overrightarrow{MN} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

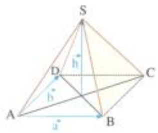


Übung 15 Vektoren im Sechseck
Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ definieren ein Sechseck. Stellen Sie die Transversalenvektoren $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DA}$ und $\overrightarrow{CF}$ mithilfe von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.



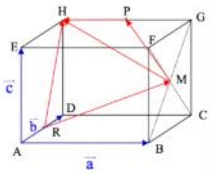
$\overrightarrow{AE} = \vec{a} + \vec{c}$
$\overrightarrow{DA} = -2\vec{c}$
$\overrightarrow{CF} = -\vec{b} + \vec{a} - \vec{c}$

Übung 16 Vektoren in einer Pyramide
Eine gerade Pyramide hat eine quadratische Grundfläche ABCD und die Spitze S. Sie wird von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{h}$ wie abgebildet aufgespannt. Stellen Sie die Seitenkantenvektoren $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{CS}$ und $\overrightarrow{DS}$ mithilfe von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{h}$ dar.



Rechnen mit Vektoren

1. Das Bild zeigt einen Quader ABCDEFGH.
   R halbiert die Strecke [AD] und P halbiert die Strecke [HG].
   M ist der Mittelpunkt des Rechtecks BCGF.
   Stellen Sie die Vektoren $\overrightarrow{PH}$, $\overrightarrow{RH}$, $\overrightarrow{RM}$, $\overrightarrow{MH}$ und $\overrightarrow{MP}$ als Linearkombination der drei Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$ dar.



$\overrightarrow{PH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{RH} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$
$\overrightarrow{RM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$
$\overrightarrow{MH} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$
$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

2. Bestimmen Sie die Lösung $\vec{x}$ der Vektorgleichung.

   a) $2\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix} - 0{,}5\cdot\vec{x} = 3\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix} + 2\cdot\vec{x} = 3\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

3. Berechnen Sie – sofern möglich – den Wert von r.

   a) $r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ b) $r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix} - r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = 0{,}5\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$

SO GEHT'S

1 Beispiel
Ein Schiff bewegt sich auf einer geradlinigen Bahn auf hoher See. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet es sich im Punkt $A(-3|4)$ und 2 Stunden später im Punkt $B(5|-2)$. (1 LE entspricht 1 km.)
a) Gib die Zeit-Ort-Gleichung an.
b) Bestimme die Position des Schiffs 5 Stunden nach und 2 Stunden vor Beobachtungsbeginn.
c) Bestimme die Geschwindigkeit des Schiffs.

Du bist dran
Ein Schiff bewegt sich auf einer geradlinigen Bahn auf hoher See. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet es sich im Punkt $A(2|7)$ und 3 Stunden später im Punkt $B(-13|28)$. (1 LE entspricht 1 km.)
a) Gib die Zeit-Ort-Gleichung an.
b) Bestimme die Position des Schiffs 4 Stunden nach und 6 Stunden vor Beobachtungsbeginn.
c) Bestimme die Geschwindigkeit des Schiffs.

a) Bestimme mit dem Vektor $\overrightarrow{AB}$ zunächst die Bewegungsrichtung des Schiffs:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-13\\28\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\21\end{pmatrix}$

Bestimme den Richtungsvektor $\vec{v}$ der Zeit-Ort-Gleichung:

$\overrightarrow{AB}$ gibt die Verschiebung in zwei Stunden an, daher gilt:
$\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

$\vec{v} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-15\\21\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix}$

Stelle die Zeit-Ort-Gleichung auf:

$\vec{x} = \vec{a} + t\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix}$

b) Setze die Werte von t in die Zeit-Ort-Gleichung ein:

$\vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} + 5\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17\\-11\end{pmatrix}$
$\vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11\\10\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-18\\35\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix} - 6\cdot\begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}32\\-35\end{pmatrix}$

~~*Gib die Positionen des Schiffs an:*~~

~~5 Stunden nach Beobachtungsbeginn befindet sich das Schiff an Position~~ $\cancel{\begin{pmatrix}17\\-11\end{pmatrix}}$.
~~2 Stunden vor Beobachtungsbeginn war es an Position~~ $\cancel{\begin{pmatrix}-11\\10\end{pmatrix}}$.

~~*c) Berechne den Betrag des Vektors $\vec{v}$:*~~

$\cancel{|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5}$

~~*Gib die Geschwindigkeit des Schiffs an:*~~

~~Das Schiff hat eine Geschwindigkeit von~~ $\cancel{5\,\frac{km}{h}}$.

2 Ein Flugzeug befindet sich auf einer geradlinigen Flugbahn. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet es sich im Punkt $A(20|40|10)$ und 4 Stunden später im Punkt $B(1580|1240|10)$. (1 LE entspricht 1 km.)
a) Gib die Zeit-Ort-Gleichung an.
b) Bestimme die Position des Flugzeugs 6 Stunden nach und 1 Stunde vor Beobachtungsbeginn.

a) $\begin{pmatrix}1580\\1240\\10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}20\\40\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1560\\1200\end{pmatrix}$ $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1560\\1200\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}390\\300\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}20\\40\\10\end{pmatrix} + 6\cdot\begin{pmatrix}390\\300\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2360\\1840\\10\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}20\\40\\10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}390\\300\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-370\\-260\\10\end{pmatrix}$

---

a) $\begin{pmatrix}-13\\28\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\21\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-15\\21\end{pmatrix} : 3 = \begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix}$

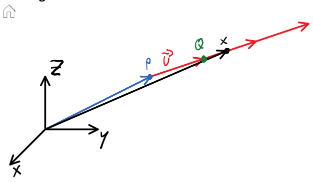
b) $\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-18\\35\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix} - 6\cdot\begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}32\\-35\end{pmatrix}$

Gerade im Raum, Vektorbetrag

Freitag, 14. März 2025 10:00

Hausaufgaben:



$\vec{0X} = \vec{0P} + t\cdot\vec{u}$

$(\vec{0Q} - \vec{0P})$

$\vec{0X} = \vec{0Q} + t^{*}\cdot\vec{u}$

Vektorbetrag

$|\vec{PQ}| = |\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

"doppelter Pythagoras"

Geraden im Raum

Diese Strategie verwendest du, wenn du mittels zweier Punkte im Raum eine Geradengleichung aufstellen und überprüfen willst, ob ein Punkt auf der Geraden liegt.

SO GEHT'S

Beispiel

Die Gerade g geht durch die Punkte P(3 | 4 | −3) und R(−2 | 3 | −2).

a) Bestimme zwei verschiedene Gleichungen der Geraden g.

b) Prüfe, ob der Punkt P(−7 | 2 | 4) auf der Geraden g liegt.

a) Berechne den Vektor $\vec{u} = \vec{PR}$:

$$\vec{PR} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 3-4 \\ -2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stelle die 1. Gleichung $g: \vec{x} = \vec{p} + t\cdot\vec{u}$ für die Gerade g auf:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

Stelle die 2. Gleichung $g: \vec{x} = \vec{r} + t\cdot\vec{u}$ für die Gerade g auf:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

b) Setze den Ortsvektor $\vec{p}$ des Punktes P in die 1. Gleichung für g ein und vereinfache:

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Big| -\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Löse die erste Zeile der Geichung nach t auf und setze das Ergebnis in die zweite und dritte Zeile der Gleichung ein:

I $-10 = -5t \quad | :(-5)$

$t = 2$

$t = 2$ in II: $-2 = 2\cdot(-1)$

$-2 = -2$ wahre Aussage

$t = 2$ in III: $7 = 2\cdot 1$

$7 = 2$ falsche Aussage

Es gibt also keine Zahl t, sodass die Gleichung $\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erfüllt ist.

Schreibe den Antwortsatz auf:

Der Punkt P liegt nicht auf der Geraden g.

Du bist dran

Die Gerade g geht durch die Punkte P(5 | −3 | 1) und R(2 | 1 | −1).

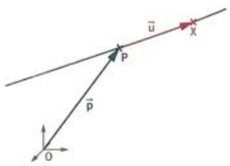
a) Bestimme zwei verschiedene Gleichungen der Geraden g.

b) Prüfe, ob der Punkt P(−4 | 9 | 5) auf der Geraden g liegt.

$$\vec{PR} = \begin{pmatrix} 2-5 \\ 1-(-3) \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Du stellst eine Gerade durch eine Gleichung dar, die den Ortsvektor $\vec{x}$ jedes möglichen Punktes X der Geraden beschreibt.

Dazu benötigst du den Ortsvektor $\vec{p}$ eines beliebigen Punktes P, der auf der Geraden ist. Dieser „stützt" die Gerade und wird als **Stützvektor** bezeichnet.



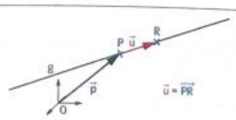
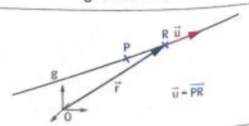
Außerdem benötigst du einen Vektor $\vec{u}$, der den Punkt P auf den Punkt X verschiebt. Dieser muss in eine der beiden Richtungen der Geraden zeigen und wird als **Richtungsvektor** bezeichnet.

Die Parametergleichung einer Geraden g ergibt sich dann zu

$$g: \vec{x} = \vec{p} + t\cdot\vec{u};\quad t \in \mathbb{R}.$$

t ist hier eine beliebige reelle Zahl und wird als Parameter bezeichnet. Daher der Name Parametergleichung.

Hat man zwei Punkte P und R der Geraden gegeben, gibt es mehrere Möglichkeiten der Geradengleichung. Zwei Möglichkeiten sind hier dargestellt:

$g: \vec{x} = \vec{p} + t\cdot\vec{u}$	$g: \vec{x} = \vec{r} + t\cdot\vec{u}$
	

○ **2** Die Gerade g geht durch die Punkte P(6 | 1 | 7) und R(4 | 3 | 9).

a) Bestimme drei verschiedene Gleichungen der Geraden g.

b) Prüfe, ob der Punkt P(0 | 2 | 4) auf der Geraden g liegt.

○ **3** Die Gerade g geht durch die Punkte A(1 | 2 | 3) und B(3 | 4 | 5).

a) Bestimme drei verschiedene Gleichungen der Geraden g.

b) Prüfe, ob der Punkt C(2,5 | 3,5 | 4,5) auf der Geraden g liegt.

○ **4** Gegeben ist die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$.

Gib drei verschiedene Punkte an, die auf der Geraden g liegen.

DAS BRAUCHST DU WIEDER

Allgemein: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

Beispiele: Gegeben sind die Punkte A und B. Bestimme $\overrightarrow{AB}$.

a) $A(5|4|-2)$ und $B(3|-3|4)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-5 \\ -3-4 \\ 4-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b) $A(4|-3|-5)$ und $B(0|-4|1)$

DARUM GEHT'S

Im vorigen Schritt hast du gesehen, dass Vektoren eine Verschiebung angeben, die du als Pfeil im Koordinatensystem darstellen kannst. Dieser Pfeil hat eine bestimmte Länge.

Die **Länge dieses Pfeils** kannst du ausrechnen. Sie entspricht dem Betrag des zugehörigen Vektors. Für den **Betrag eines Vektors $\vec{a}$** gilt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ gilt: } |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Betrag eines Vektors bestimmen und die Länge des zugehörigen Pfeils angeben

Diese Strategie verwendest du, wenn du den Betrag eines Vektors bestimmen und herausfinden willst, ob ein Dreieck gleichschenklig ist.

SO GEHT'S

1 Beispiel

Überprüfe, ob das Dreieck ABC mit $A(4|1|3)$, $B(4|1|1)$ und $C(2|-1|2)$ gleichschenklig ist.

Berechne die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-4 \\ 1-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ -1-1 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ -1-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechne die jeweiligen Beträge:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

Begründe, ob das Dreieck ABC gleichschenklig ist:

Da $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$, ist das Dreieck ABC gleichschenklig.

Du bist dran

Überprüfe, ob das Dreieck ABC mit $A(3|0|1)$, $B(3|0|3)$ und $C(1|-2|2)$ gleichschenklig ist.

○ **2** Überprüfe, ob das Dreieck ABC mit $A(-3|-6|-3)$, $B(7|0|1)$ und $C(5|-3|-1)$ gleichschenklig ist.

○ **3** Überprüfe, ob die Punkte A, B, C und D die Eckpunkte eines Parallelogramms sind. Berechne auch die Längen aller Seiten.

a) $A(2|-4|5)$, $B(2|-2|6)$, $C(1|-3|6)$ und $D(2|-1|5)$

b) $A(1|2|4)$, $B(-2|8|7)$, $C(3|6|2)$ und $D(4|2|1)$

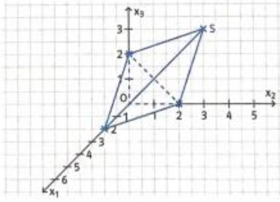
c) $A(2|3|4)$, $B(3|5|7)$, $C(4|1|-1)$ und $D(5|3|2)$

◐ **4** **a)** Bestimme die fehlende Koordinate p_2 so, dass der Punkt $P(3|p_2|4)$ vom Punkt $Q(1|2|3)$ den Abstand 3 hat.

b) Bestimme die fehlende Koordinate p_1 so, dass der Punkt $P(p_1|-2|-2)$ vom Punkt $Q(0|1|2)$ den Abstand 5 hat.

◐ **5** Die Eckpunkte der Grundfläche ABC einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze S liegen auf den Koordinatenachsen (siehe Abbildung). Gegeben ist der Punkt $A(2|0|0)$ und $C(0|0|2)$ und die Vektoren $\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Berechne die Länge der Grundkanten und der Seitenkanten.



Schnittpunkte

Freitag, 21. März 2025 10:00

Hausaufgaben:

DAS BRAUCHST DU WIEDER

Beispiele: Prüfe, ob folgende Punkte auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ liegen.

a) P(1 | 3 | 4)

$\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-2\\-3\\4\end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$

I $-2 = 2t \quad |:2$

$t = -1$

$t = -1$ in II $-3 = (-1) \cdot 3$

wahre Aussage

$t = -1$ in III $4 = (-1) \cdot (-1)$

falsche Aussage

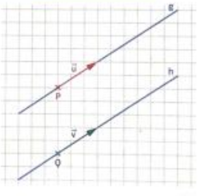
P liegt nicht auf g.

b) Q(9 | 15 | −3)

DARUM GEHT'S

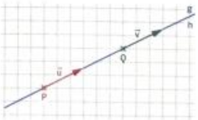
Sind die Richtungsvektoren zweier Geraden Vielfache voneinander, so sind die Geraden zueinander parallel und verschieden oder zueinander parallel und identisch.

Ansonsten schneiden sich die Geraden oder sind zueinander windschief.



Um zu unterscheiden, ob zwei Geraden zueinander parallel oder identisch sind, kann man sich folgende Eigenschaft zunutze machen:
- Zueinander parallel und verschiedene Geraden haben keinen gemeinsamen Punkt.
- Zueinander parallel und identische Geraden haben unendlich viele Punkte gemeinsam.

Hat man zwei Geraden g mit $g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$ und h mit $h: \vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{v}$ gegeben, dann kann man einfach überprüfen, ob der Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{p}$ auf der Geraden h liegt. Ist dem so, so sind die Geraden zueinander parallel und identisch, ansonsten sind sie zueinander parallel und verschieden.



1 Beispiel

Gegeben sind die Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\0\\9\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-2\\7\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.

Bestimme die Lage der zwei Geraden zueinander und berechne gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S.

Überprüfe, ob die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind:

$t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

I $t = 2$

II $2 \cdot 2 = 1$ falsche Aussage

Also sind die beiden Geraden windschief zueinander oder schneiden sich.

Setze die zwei Geraden g und h gleich und vereinfache das lineare Gleichungsssystem:

$\begin{pmatrix}6\\0\\9\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}2\\-2\\7\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \quad \Big| -s \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\0\\9\end{pmatrix}$

$r \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-2\\-2\end{pmatrix}$

Schreibe das lineare Gleichungssystem auf:

I $r - 2s = -4$

II $2r - s = -2$

III $3r - s = -2$

Löse die ersten zwei Zeilen des linearen Gleichungssystem nach r und s auf:

I $r - 2s = -4 \quad | \cdot (-2)$]+

II $2r - s = -2$

$3s = 6 \quad |:3$

$s = 2$

s in I: $r - 4 = -4 \quad | +4$

$r = 0$

Setze r und s in die 3. Zeile des linearen Gleichungssystems ein und entscheide, ob die Geraden zueinander windschief sind oder sich schneiden:

r, s in III: $3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2$ wahre Aussage

Die Geraden g und h schneiden sich.

Bestimme gegebenenfalls den Schnittpunkt S:

r in g:

$\vec{s} = \begin{pmatrix}6\\0\\9\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\\9\end{pmatrix}$

S(6 | 0 | 9)

Du bist dran

Gegeben sind die Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ und

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Bestimme die Lage der zwei Geraden zueinander und berechne gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S.

3 Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$, und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\6\\11\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\-2\\-4\end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$.

Zeige, dass die Geraden zueinander parallel sind und untersuche, ob sie verschieden oder identisch sind.

4 Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$. Überprüfe, ob die Geraden g und h zueinander parallel sind und untersuche, ob sie verschieden oder identisch sind.

a) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-1\\6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$.

b) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-2\\12\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}6\\3\\-3\end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$.

c) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$.

5 Bestimme die fehlende Koordinate so, dass g und h zueinander parallel sind und untersuche, ob sie verschieden oder identisch sind.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\-6\\b_3\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-5\\9\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}4\\-8\\12\end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-5\\0\\-10\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\d_2\\4\end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\b_2\\-5\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$

6 Gegeben ist ein Quader mit den Eckpunkten A(6 | 2 | 1), B(6 | 7 | 1), C(4 | 7 | 1), D(4 | 2 | 1), E(6 | 2 | 4), F(6 | 7 | 4), G(4 | 7 | 4) und H(4 | 2 | 4).

a) Zeige, dass die Gerade durch die Punkte A und B parallel zur Geraden durch die Punkte H und G ist.

b) Zeige, dass die Gerade durch die Punkte B und G parallel zur Geraden durch die Punkte A und F ist.

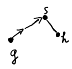
c) Zeige, dass die Gerade durch die Punkte C und H parallel zur Geraden durch die Punkte B und E ist.

2 Gegeben sind die Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \overset{\vec{v}}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} + s \cdot \overset{\vec{u}}{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}}$. $\quad \vec{v} \neq k \cdot \vec{u}$

Bestimme die Lage der zwei Geraden zueinander und berechne gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S.

I $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$



I $r = 4 + 2 \cdot s$ ✓

II $1 = 2 + s \quad |-2 \Rightarrow \boxed{s = -1}$

III $1 + r = 4 + s$

I* $r = 4 + 2 \cdot (-1) = \boxed{2 = r}$

III* $1 + 2 = 4 + (-1)$

$3 = 3$ ✓

$S = (2|1|3)$

$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

3 Gegeben sind die Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix}$ und $i: \vec{x} = \begin{pmatrix}-7\\2\\-8\end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix}8\\-2\\-6\end{pmatrix}$.

Überprüfe, ob die Geraden sich schneiden oder windschief zueinander sind und berechne gegebenenfalls die Koordinaten der Schnittpunkte.

6 Zwei Flugzeuge F_1 und F_2 fliegen geradlinig über Deutschland und starten zum gleichen Zeitpunkt. Die Flugbahn des ersten Flugzeugs kann durch die Gleichung

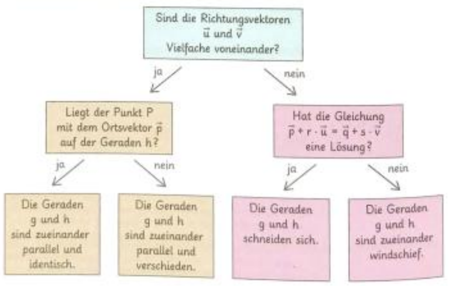
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\15\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-3\\-4\\-5\end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$, beschrieben

werden, die des zweiten Flugzeugs mit

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix}-8\\-10\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}7\\3\\4\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

Untersuche, ob sich die Flugbahnen kreuzen und ob die Gefahr einer Kollision besteht.

Sind zwei Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$ gegeben, so kann man mit folgendem Schema die Lage dieser zwei Geraden überprüfen:



6 Zwei Flugzeuge F_1 und F_2 fliegen geradlinig über Deutschland und starten zum gleichen Zeitpunkt. Die Flugbahn des ersten Flugzeugs kann durch die Gleichung

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$, beschrieben

werden, die des zweiten Flugzeugs mit

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Untersuche, ob sich die Flugbahnen kreuzen und ob die Gefahr einer Kollision besteht.

I $1 - 3s = -8 + 7t$

II $2 - 4s = -10 + 3t$

III $15 - 5s = 4t \Rightarrow \boxed{t = \frac{15}{4} - \frac{5}{4} \cdot s}$

II* $2 - 4s = -10 + 3 \cdot \left(\frac{15}{4} - \frac{5}{4}s\right)$

$2 - 4s = -10 + \frac{45}{4} - \frac{15}{4}s$

$s = 3$ ✓

in I → I*

$1 - 3 \cdot 3 = -8 + 7t$

$0 = 7t \Rightarrow t = 0$

Untersuche die Lagebeziehung der beiden Geraden.

1) $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$; $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

2) $h_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $h_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

3) $k_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $k_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$

4) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

5) $k_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

6) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

7) $m: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$; $n: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 21 \\ 6 \end{pmatrix}$

8) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) I $1 + 2r = -1 + 2t \quad |+1$

II $-2 + r = -2 + 2t$

III $1 - 3r = 2 - 5$

I* $2 + 2r = 2t$

II* $-2 + r = \underbrace{-2 + 2}_{0} + 2r \quad |-r$

$-2 = r \Rightarrow t = 1 - 2 = -1$

III* $1 - 3 \cdot (-2) = 2 - 5 \cdot (-1)$

$7 = 7$ ✓

$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

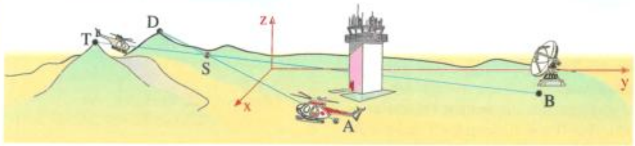
Helikopter Helikopter

Dienstag, 1. April 2025 10:00

Hausaufgaben:

Beispiel: Flugbahnen

Der Rettungshubschrauber Alpha startet um 10:00 Uhr vom Stützpunkt Adlerhorst $A(10|6|0)$. Er fliegt geradlinig mit einer Geschwindigkeit von 300 km/h zum Gipfel des Mount Devil $D(4|-3|3)$, wo sich der Unfall ereignet hat. Die Koordinaten sind in Kilometern angegeben. Zeitgleich hebt der Hubschrauber Beta von der Spitze des Tempelbergs $T(7|-8|3)$ ab, um Touristen nach Bochum-Nord $B(4|16|0)$ zurückzubringen. Seine Geschwindigkeit beträgt 350 km/h.



a) Zeigen Sie, dass die beiden Hubschrauber sich auf Kollisionskurs befinden.
b) Untersuchen Sie, ob die Hubschrauber tatsächlich kollidieren.

$\vec{AD} = \begin{pmatrix}4\\-3\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-9\\3\end{pmatrix}$

$\vec{TB}$ $\begin{pmatrix}4\\16\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\-8\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\24\\-3\end{pmatrix}$

$\alpha: \vec{x} = \begin{pmatrix}10\\6\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-6\\-9\\3\end{pmatrix}$ $\beta: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\-8\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-3\\24\\-3\end{pmatrix}$

I $10 - 6r = 7 - 3t$
II $6 - 9r = -8 + 24t$
III $3r = 3t \Rightarrow$ III* $r = 1 - t$

I* $10 - 6 \cdot (1-t) = 7 - 3t$
$10 - 6 + 6t = 7 - 3t \quad | -6t$
$-3 = -9t \quad | : (-9)$
$\frac{1}{3} = t \Rightarrow r = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

II* $6 - 9 \cdot \frac{2}{3} = -8 + 24 \cdot \frac{1}{3}$ ✓

$\begin{pmatrix}7\\-8\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3\\24\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix} = \vec{OS}$

$\vec{AS} =$

$\vec{TS} =$

Drohne und Haus

Ministerium für Schule und Berufsbildung
Schleswig-Holstein

Schriftliche Abiturprüfung 2017
Name:

Kernfach Mathematik

Aufgabe 3: Analytische Geometrie

In einer Stadt befindet sich ein quaderförmiges, 65 m hohes Haus. In der Modellierung entspricht die x_1x_2-Ebene dem Erdboden. Die Grundfläche des Hauses ist das Rechteck $RSTU$. Die jeweils entsprechenden Eckpunkte der Dachfläche heißen R', S', T' und U'.

Die Eckpunkte R, S und T haben die Koordinaten
$R(80\,|\,200\,|\,0)$,
$S(120\,|\,180\,|\,0)$ und
$T(135\,|\,210\,|\,0)$.

Eine Einheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

Die Flugbahn einer Drohne wird beschrieben durch eine Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}$.

Dabei beschreibt $\vec{x}$ die Position der Drohne zur Zeit t, wobei t in Sekunden gemessen wird. Zur Zeit $t = 0$ durchfliegt die Drohne also den Punkt $P(0\,|\,0\,|\,5)$.

a) a1) Bestimmen Sie die Koordinaten des vierten Eckpunktes U der Grundfläche.

a2) Ermitteln Sie die Entfernung der Drohne zum Punkt P nach 15 Sekunden.

a3) Berechnen Sie den Steigungswinkel α der Flugbahn.

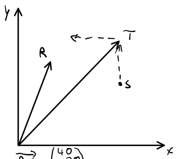
(7 P)

b) b1) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Seitenfläche $RSS'R'$ des Hauses.

b2) Untersuchen Sie, ob die Drohne diese Fläche treffen wird.

b3) Berechnen Sie den Abstand, den die Flugbahn der Drohne zur Geraden h durch die Punkte R' und S' hat.

(15 P)



$\vec{RS} = \begin{pmatrix}40\\-20\\0\end{pmatrix}$

$\vec{OU} = \vec{OT} - \vec{RS} = \begin{pmatrix}135\\210\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}40\\-20\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}95\\230\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} + 15 \cdot \begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}45\\90\\35\end{pmatrix}$

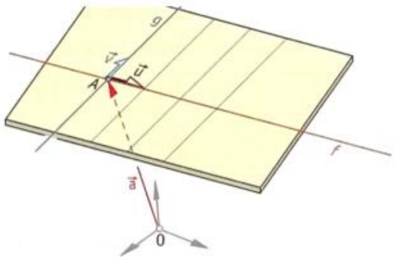
$\begin{pmatrix}45\\90\\35\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}45\\90\\30\end{pmatrix}$

$| \quad | = \sqrt{\quad} = 105\,m$

Ebene

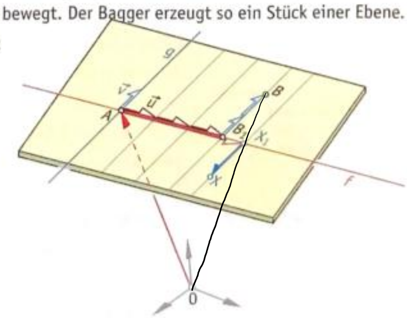
Freitag, 4. April 2025 10:00

Hausaufgaben:



Auf einer Halbinsel im Gremminer See bei Gräfenhainichen in Sachsen-Anhalt kann man fünf ausgediente Schaufelrad- und Eimerkettenbagger besichtigen. Die fünf Bagger, die bis 1991 im Braunkohletagebau eingesetzt wurden, wiegen zusammen etwa 7000 t. Der Standort erhielt wohl auch deshalb den Namen Ferropolis – Stadt aus Eisen. Das Foto oben zeigt zwei Eimerkettenbagger im Einsatz.
Beim Schürfen wird die Eimerkette in Richtung des Vektors $\vec{v}$ gezogen, während sich der Bagger, der sich in Punkt A befindet, langsam in Richtung des Vektors $\vec{u}$ bewegt. Der Bagger erzeugt so ein Stück einer Ebene.
Gegeben sind der Punkt A und die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

$A(8|3|6)$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

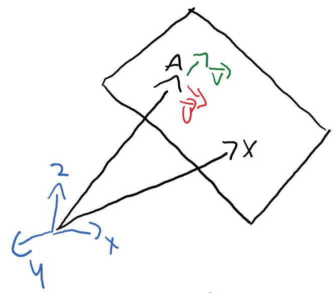


a) Berechnen Sie mit diesen Daten den Ortsvektor des Punktes B in der Figur rechts.

b) Geben Sie den Ortsvektor eines beliebigen Punktes X der Ebene an.

c) Entscheiden Sie begründet, welcher der beiden Punkte $P(10|23|11)$ und $Q(3|13|9)$ in der Ebene liegt und welcher nicht.

Ebene (Parameterform)



$\vec{OX} = \vec{OA} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$

Stützvektor Parameter

a) $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) $\vec{OX} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Q: $\begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

I $3 = 8 + 4r + s$

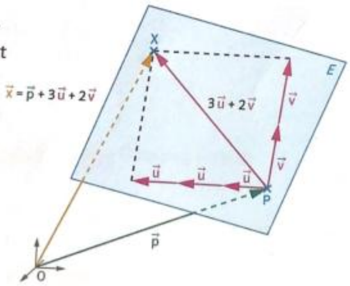
II $13 = 3 - 2r + 2s$

III $9 = 6 + s \Rightarrow s = 3$ ✓

I* $3 = 8 + 4r + 3 \Rightarrow r = -2$ ✓

$13 = 3 - 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 3$ ✓

Du stellst eine Ebene durch eine Gleichung dar, die den Ortsvektor $\vec{x}$ jedes Punktes X der Ebene beschreibt. Um jeden möglichen Punkt darzustellen, benötigst du den Ortsvektor $\vec{p}$ eines beliebigen Punktes P, der in der Ebene liegt. Dieser „stützt" sozusagen die Ebene und wird als **Stützvektor** bezeichnet.



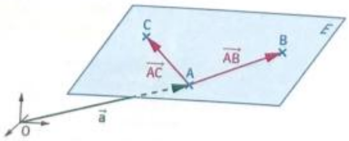
Außerdem benötigst du zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, die den Punkt P auf jeden beliebigen Punkt X der Ebene verschieben können. Diese **Spannvektoren** müssen in der Ebene liegen und in zwei verschiedene Richtungen zeigen.

Die Parametergleichung einer Ebene E ergibt sich dann zu

$$\mathbf{E:}\ \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v},\ r, s \in \mathbb{R}$$

Sind drei Punkte einer Ebene E gegeben, kann die Paramatergleichung mithilfe dieser Punkte aufgestellt werden:

$$\mathbf{E:}\ \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC},\ r, s \in \mathbb{R}$$



Beispiel

Die Punkte A(1 | 3 | −2), B(2 | −2 | 4) und C(4 | 0 | −3) liegen in der Ebene E.

a) Bestimme die Parametergleichung der Ebene.

b) Prüfe, ob der Punkt D(−4 | 4 | 6) in der Ebene E liegt.

a) Berechne die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ -2 - 3 \\ 4 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 0 - 3 \\ -3 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Stelle die Gleichung $E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$ für die Ebene E auf:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$r, s \in \mathbb{R}$

b) Setze den Ortsvektor $\vec{d}$ des Punktes D mit der Gleichung der Ebene E gleich und vereinfache:

Du bist dran

Die Punkte A(2 | 0 | −1), B(1 | 5 | −3) und C(−2 | 7 | 3) liegen in der Ebene E.

a) Bestimme die Parametergleichung der Ebene.

b) Prüfe, ob der Punkt D(−2 | 7 | −5) in der Ebene E liegt.

2 Bestimme eine Gleichung der Ebene E, in der die Punkte A, B und C liegen.
(Die Punkte A, B und C liegen nicht auf einer Geraden.)
Untersuche, ob der Punkt D in der Ebene E liegt.

a) A(0 | 0 | −2), B(0 | −5 | 0), C(5 | 0 | 1), D(10 | −5 | 6)
b) A(2 | 1 | 0), B(0 | 6 | 1), C(3 | 2 | 3), D(5 | −3 | 2)

2a)

3 Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $r, s \in \mathbb{R}$.

a) Überprüfe, ob die Punkte A(2 | −1 | −8), B(0 | 0 | 0) und C(2 | 8 | 14) in der Ebene liegen.
b) Bestimme einen Wert für a so, dass der Punkt P in der Ebene liegt.
i) P(4 | a | −4)   ii) P(5 | −4 | a)

4 Bestimme, falls möglich, eine Parametergleichung der Ebene E, die durch die Punkte A, B und C festgelegt ist. Begründe gegebenenfalls, warum dies nicht möglich ist.
a) A(1 | 1 | 5), B(2 | −3 | 7), C(4 | 5 | 11)   **b)** A(1 | 0 | 4), B(2 | −3 | 7), C(3 | −6 | 10)

5 Durch eine Gerade g und einen Punkte P, der nicht auf der Geraden liegt, ist eine Ebene eindeutig definiert. Bestimme die Parametergleichung der Ebene E.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$,   P(2 | 3 | 5)

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$,   P(4 | −2 | −4)

Balkonkraftwerk

Dienstag, 29. April 2025 10:00

Hausaufgaben:

Balkonkraftwerk Abi 2024

Aufgabe 4: Analytische Geometrie-WTR

An einem Balkon wird ein Solarmodul montiert. In einem geeigneten Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene den Erdboden. Das Viereck $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(1\,|\,0\,|\,4)$, $B(3\,|\,0\,|\,4)$, $C(3\,|\,0{,}5\,|\,2{,}8)$ und $D(1\,|\,0{,}5\,|\,2{,}8)$ liegt in einer Ebene E und beschreibt die Moduloberseite. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

a) a1) Weisen Sie nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist. (3 BE)

a2) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Moduloberseite und die Länge einer Diagonalen. (4 BE)

a3) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E ~~in Koordinatenform.~~ (3 BE)

a1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ -1{,}2 \end{pmatrix}$

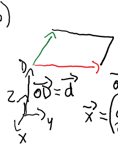
$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ -1{,}2 \end{pmatrix}$

a2) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ -1{,}2 \end{pmatrix}$ $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + \dots} = 2{,}3$

$|\overrightarrow{AB}| = 2$

$|\overrightarrow{BC}| = 1{,}3$

a3)



$\overrightarrow{OD} = \vec{d}$

$$\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 2{,}8 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{OD}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}5 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{DA}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{DC}}$$

1. Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Ebene E durch die Punkte $A(-2|5|2)$, $B(2|3|0)$ und $C(2|-1|2)$.

a) Stellen Sie eine Parametergleichung und eine Koordinatengleichung der Ebene E auf.
b) Prüfen Sie, ob der Punkt $P(-2|3|1)$ auf der Geraden g oder auf der Ebene E liegt.
c) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E. Bestimmen Sie ggf. den Schnittpunkt S.

Laserbohrung

Ein Edelstahlblock hat die Form eines quadratischen Pyramidenstumpfes. Die Seitenlänge der Grundfläche beträgt 8 cm, diejenige der Deckfläche beträgt 4 cm, die Höhe beträgt 8 cm.

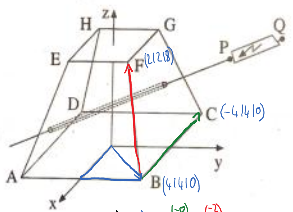
Mit einem Laserstrahl, der auf der Strecke [PQ] mit P(-3,5|9,5|6) und Q(-6|16|8) erzeugt wird, durchbohrt man das Werkstück.
Der Koordinatenursprung liegt im Mittelpunkt der Grundfläche.

a) Bestimme die Koordinaten der Punkte B, F und C.

b) Gib eine Geradengleichung für den Laserstrahl an und stelle die Ebene E_{BFC} auf.

c) Berechne den Eintrittspunkt des Laserstrahls. *Zur Kontrolle (-1| 3 |4)*

d) Ermittle die Länge des Bohrkanals, wenn der Austrittspunkt bei (1,5| -3,5 |2) liegt.



$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 9{,}5 \\ 6 \end{pmatrix} + f \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 9{,}5 \\ 6 \end{pmatrix} + f \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$

$4 - 8r - 2s = -3{,}5 - 6f$

$4 - 2s = 9{,}5 + 16f \quad | -4 \quad | :(-2) \quad \to s = -2{,}75 - 8f$

$8s = 6 + 8f \quad \to 8(-2{,}75 - 8f) = 6 + 8f$

$-22 - 64f = 6 + 8f \quad | -6 \quad | + 64f$

$-28 = 72f \quad | :72$

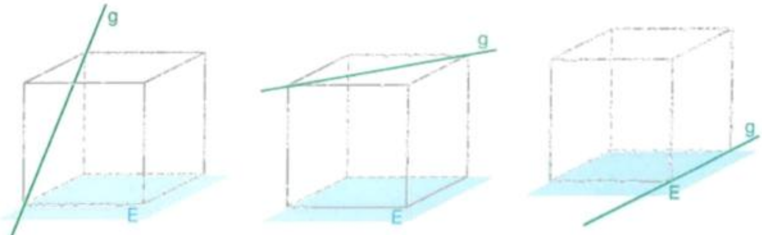
$-0{,}3\overline{8} = f$

Lage Gerade-Ebene

Dienstag, 13. Mai 2025 10:00

Hausaufgaben:

Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene



g und E schneiden sich in einem Punkt. | g und E sind parallel. | g liegt in E.

Die mögliche Lagebeziehung kann man mithilfe der Gleichungen der Geraden und der Ebene berechnen.

$$g:\ \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u} \qquad E:\ \vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$$

Schnittpunktansatz:
Die Geradengleichung wird mit der Ebenengleichung gleichgesetzt.

$$\vec{a} + t\vec{u} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$$

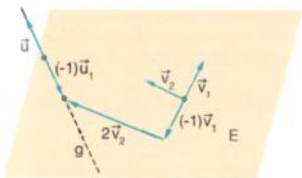
Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Variablen. Das Gleichungssystem kann genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen haben.

24 *Schnittpunkt*

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebene

$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ mit der Geraden

$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\10\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-5\\3\\7\end{pmatrix}$



Ordnen Sie $\vec{u_1}$, $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ den Richtungsvektoren zu und interpretieren Sie die Zeichnung.

27 *Rechner defekt – kein Problem*

Bei diesen Aufgaben geht es auch leicht per Hand. Welche Lage haben die Ebene und die Gerade zueinander?

a) $E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$; $\quad g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\0\\-4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

b) $E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$; $\quad g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\8\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\0\\-3\end{pmatrix}$

c) $E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$; $\quad g:\ \vec{x} = t\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$

d) $E:\ \vec{x} = r\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}6\\-2\\2\end{pmatrix}$; $\quad g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}14\\1\\15\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$

Beispiel zu a):

$$\begin{array}{lll} 1 \quad +4s = 6 + t & & 4s - t = 5 \\ 1 + r \quad = 0 & \Rightarrow & r \quad = -1 \\ 5 + r - s = -4 + 2t & & r - s - 2t = -9 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} & t = 4s - 5 & & t = 4s - 5 & & t = 3 \\ \Rightarrow & r = -1 & \Rightarrow & r = -1 & \Rightarrow & r = -1 \\ & -1 - s - 8s + 10 = -9 & & -9s = -18 & & s = 2 \end{array}$$

E und g schneiden sich im Punkt P = (9|0|2).

Anwendungsaufgaben zur Analytischen Geometrie

$\vec{b} = \begin{pmatrix}850\\-110\\335\end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix}-10\\10\\-1\end{pmatrix}$

v = 85
-110 + 85 · 10 = 740
335 + 85 · -1 = 250

$\vec{d} = \begin{pmatrix}475\\1070\\195\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}150\\420\\0\end{pmatrix}$

$r = -3{,}1\overline{6}$
→ -260
→ 195

Anwendungsaufgaben zur Analytischen Geometrie

1. Fußballtor

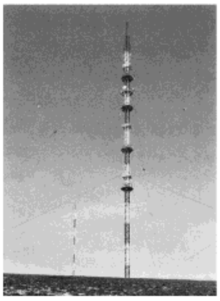
Die Punkte A(0|0|0), B(0|740|0), C(0|740|250) und D(0|0|250) sind Eckpunkte eines Fußballtores. Einer Einheit im Koordinatensystem entspricht 1 cm. Der Fußball wird als punktförmig angenommen und alle Flugbahnen als gradlinig.

a) Spieler 1 köpft den Ball aus K(850|-110|335) in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass er den Pfosten trifft.

b) Spieler 2 schiesst den Ball aus der Position P(475|1070|195) in Richtung Q(150|420|0).
Ermitteln Sie, ob der Ball ins Tor gelangt, falls der Torwart nicht eingreift.

2. Sendemast



Ein 200 m hoher Sendemast steht im Punkt F(40|-30|0) senkrecht auf einer ebenen Bodenfläche, die in x-y-Ebene liegt (alle Angaben in m). Der Sendemast wird von der Sonne beschienen und wirft einen Schatten auf die Bodenfläche.

a) Die Sonnenstrahlen, die man als parallel annehmen kann,

fallen in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ -50 \end{pmatrix}$ ein.

In welchem Punkt S endet der Schatten des Sendemastes?

b) Berechnen Sie die Länge des Schattens.

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 850 \\ -110 \\ 335 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}$ $-110 + 85 \cdot 10 = 740$

$335 + 85 \cdot -1 = 250$

$r = -3,1\overline{6}$

$\vec{d} = \begin{pmatrix} 475 \\ 1070 \\ 195 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 150 \\ 420 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow -260$ $\rightarrow 195$

$\begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ 200 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ -50 \end{pmatrix}$

$200 - 50r = 0 \quad | -200 \quad | :(-50)$

$r = 4$

$40 + 4 \cdot 30 = 160$

$-30 + 4 \cdot 30 = 90$

$S = (160|90|0)$

b) $\sqrt{120^2 + 120^2} \approx 169,7$

Punkt - Gerade - Ebene

Gegeben sind die Punkte $A(1/0/2)$, $B(5/2/2)$ und $C(-2/0/5)$ im $\mathbb{R}^3$.

Die Punkte A, B und C legen die Ebene E fest.

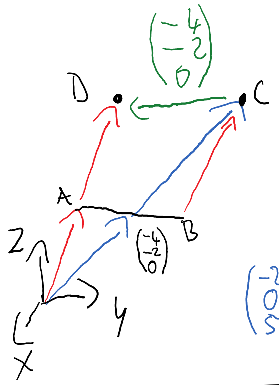
Die Gerade g ist gegeben durch $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (mit $t \in \mathbb{R}$)

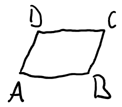
a) Begründen Sie, dass die Punkte A, B und C ein Dreieck bilden.

b) Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm. Bestimmen Sie die Koordinaten von D.

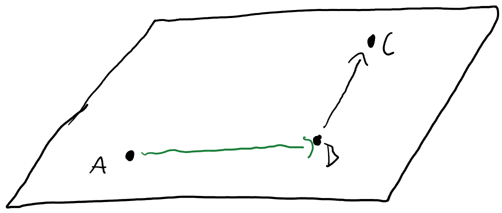
c) Geben Sie eine Gleichung der durch A, B und C festgelegten Ebene E an und ermitteln Sie den Schnittpunkt S der Geraden g mit dieser Ebene E. (Ergebnis: $S(2/1/3)$)

d) Begründen Sie, dass der Schnittpunkt S im Innern des Dreiecks ABC liegt:
(Hinweis: Stellen Sie $\overline{AS}$ als Linearkombination von $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ dar und skizzieren Sie die Lage von S im Dreieck ABC.)





$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$



$$\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{OA}} + r \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AB}} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

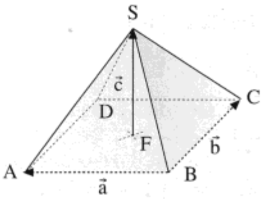
vektoren angeben
geraden aufstellen
schnittpunkte gerade, ebene
...

Klausurvorbereitung III

Dienstag, 20. Mai 2025 10:00

Hausaufgaben:

Übungsaufgaben zur Analytischen Geometrie



1. Vektoren

Gegeben ist die abgebildete quadratische Pyramide.
Stellen Sie die Vektoren als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

$\vec{AC}, \vec{BD}, \vec{BF}, \vec{DF}, \vec{SC}$

2. Koordinatengeometrie

In einem Koordinatensystem sind die Punkte gegeben: A(-1|8|2), B(4|5| -1), C(2|7| 1).
a) Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke [AB]!
b) Die Punkte A, B, C seien die Eckpunkte eines Parallelogramms ABCD.
Bestimmen Sie die Koordinaten der vierten Ecke D und den Umfang des Parallelogramms.

3. Geraden

a) Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass g und h sich schneiden. Bestimmen Sie den Schnittpunkt S.

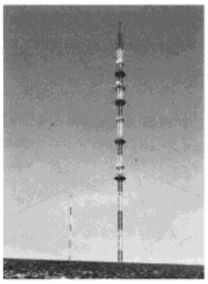
b) Prüfen Sie, ob der Punkt P(4|3|1) auf der Stecke $\overline{AB}$ mit A(2|1|3) und B(6|7|1) liegt.

4. Ebene

Gegeben sind die Punkte A(1|1| -1), B(3|5|1), C(5|5|7) und D(-1|0| -6).
a) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C auf.
b) Zeigen Sie, dass der Punkt D in der Ebene E liegt.

5. Sendemast

Ein 200 m hoher Sendemast steht im Punkt F(40|-30|0) senkrecht auf einer ebenen Bodenfläche, die in x-y-Ebene liegt (alle Angaben in m).
Der Sendemast wird von der Sonne beschienen und wirft einen Schatten auf die Bodenfläche.



a) Die Sonnenstrahlen, die man als parallel annehmen kann,

fallen in Richtung $\vec{v}=\begin{pmatrix}30\\30\\-50\end{pmatrix}$ ein.

In welchem Punkt S endet der Schatten des Sendemastes?

b) Berechnen Sie die Länge des Schattens.

$\vec{AC} = -\vec{a}+\vec{b}$ $\quad \vec{BF} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$

$\vec{BD} = \vec{b} + \vec{a}$ $\quad \vec{DF} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

$\vec{SC} = -c - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$\vec{OA} + \frac{1}{2} AB \rightarrow AB = \begin{pmatrix}5\\-3\\-3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-1\\8\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\-3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1,5\\6,5\\0,5\end{pmatrix}$

$\vec{AD} = \vec{BC}$

$\vec{AB} = \vec{DC}$

$x_0 \quad \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$

$\begin{pmatrix}-1\\8\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\10\\4\end{pmatrix}$

$g = h$

$1 - r = 0 \rightarrow r = 1$

$2 = 4 - 2s \quad |+2s \quad |-2$

$3 + 2r = 4 + 1s \quad \Leftrightarrow 2s = 2 \quad |:2$

$s = 1$

$5 = 5$ ✓

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$

$\vec{c} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}6\\7\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$

$2 + 6t = 4 \quad |-2 \quad |:6 \rightarrow t = \frac{1}{3}$

$1 + 7t = 3 \quad |-1 \quad |:7 \rightarrow t \neq \frac{1}{3}$

$3 + t = 1 \quad |-3 \qquad t = -2$

$E = \vec{OA} + r\cdot\vec{AB} + s\cdot\vec{AC}$

$\begin{pmatrix}-1\\0\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix}$

$-1 = 1 + 2r + 4s \quad |-2r \quad |+1$

$-2r = 2 + 4s \quad |:(-2)$

$r = -1 - 2s$

$0 = 1 + (-1-2s)\cdot 4 + 4s$

$0 = 1 + -4 - 8s + 4s$

$0 = -3 - 4s \quad |+3 \quad |:(-4)$

$-0,75 = s$

$r = -1 - 2\cdot -0,75$

$r = 0,5$

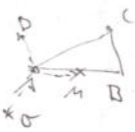
$-6 = -1 + 0,5\cdot 2 - 0,75\cdot 8$

$-6 = -6$

① $\vec{AC} = -\vec{a} + b$ $\quad \vec{BF} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$ $\quad \vec{SC} = -\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$\vec{BD} = \vec{b} + a$ $\quad \vec{DF} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}a$

②



a) $\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \begin{pmatrix}-1\\8\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\-3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1,5\\6,5\\0,5\end{pmatrix}$

b) $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} = \begin{pmatrix}-1\\8\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\10\\4\end{pmatrix}$

③ a) $g = h$ $\quad$ I. $1 - r = 0 \Rightarrow \underline{\underline{r = 1}}$

II $2 = 4 - 2s \Rightarrow \underline{\underline{s = +1}}$ $\quad$ in III

III $1 = 1$ ✓

$\vec{OS} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$

④ a) E: $\vec{x} = \vec{OA} + t\cdot\vec{AB} + s\cdot\vec{AC}$

b) $\begin{pmatrix}-1\\0\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix}$

I $-1 = 1 + 2t + 4s \Rightarrow 2t = -2 - 4s \quad |:2$

$|\cdot 6| \qquad |\cdot 2| \qquad \cdot 8|$

I $\quad -1 = 1 + 2t + 4s \Rightarrow 2t = -2 - 4s \quad |:2$

$t = -1 - 2s \qquad t = -1 + \frac{9}{4} = \frac{5}{4}$

II $\quad 0 = 1 + (-1-2s) \cdot 4 + s \cdot 4$

$0 = 1 - 4 - 8s + 4s \Rightarrow +3 = -4s \Rightarrow \boxed{s = -\frac{3}{4}}$

III $\quad -6 = -1 + \frac{15}{4} - \frac{24}{4} \quad F$

Stochastik

Dienstag, 27. Mai 2025 10:00

Hausaufgaben:

Zufallsexperiment:
- Mögliche Ausgänge sind bekannt
- tatsächlicher Ausgang aber nicht sicher vorhersagbar.

Ergebnis:
- Ein möglicher Ausgang.

Ergebnisraum/Ergebnismenge:
- Alle möglichen Ausgänge
- z.B. $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Relative Häufigkeit:
- $rel. Häufigkeit = \frac{Häfigkeit\ Ergebnis}{Anzahl\ Versuche}$

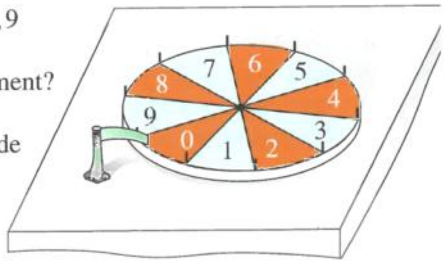
Wahrscheinlichkeit
- Chance des Ergebnisses
- $P(6) = \frac{1}{6}$

Ereignis:
- Menge von Ergebnissen/Ausgängen mit einer bestimmten Eigenschaft
- z.B. Eine **gerade** Zahl wird gewürfelt

Grundbegriffe der Stochastik Übungen

Übung 2

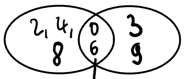
Ein Glücksrad mit 10 gleich großen Sektoren $0, \ldots, 9$ wird einmal gedreht.



a) Aus welchen Gründen ist dies ein Zufallsexperiment?
b) Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum an.
c) Stellen Sie das Ereignis E: „Es kommt eine gerade Zahl" als Ergebnismenge dar.
d) Beschreiben Sie die Ereignisse $E_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $E_2 = \{0, 3, 6, 9\}$ und $E_3 = \{2, 3, 5, 7\}$ verbal.

Aufgaben
b) $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
c) $\Sigma = \{2, 4, 6, 8\}$

$E_{orange} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ $E_3 = \{0, 3, 6, 9\}$



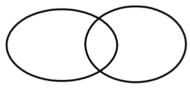
Schnittmenge

$E_0 \cap E_3$

„und"

$E_0 \cup E_3 = \{0, 2, 4, 6, 8, 3, 9\}$

„oder"



Vereinigungsmenge

Übung 3

Max und Moritz bilden im Spielkasino beim Roulette ein Team. Max setzt auf „manque" (die 1. Hälfte), Moritz setzt auf „noir" (alle schwarzen Zahlen). Stellen Sie die Ereignisse E_1: „Max gewinnt", E_2: „Moritz gewinnt" und E_3: „Das Team Max & Moritz gewinnt" als Ergebnismengen dar.

Ein Zufallsexperiment hat unterschiedliche **Ergebnisse**, die man nicht vorhersagen kann. Man bezeichnet sie mit e und erhält so eine **Ergebnismenge** $S = \{e_1, e_2, e_3, \dots e_n\}$.
Beispiele:
Münzwurf **S** = {Wappen; Zahl}
Würfeln **S** = {1; 2; 3; 4; 5; 6}
Glücksrad **S** = {Bereich 1; Bereich 2; …; Bereich n}
Jedem Ergebnis kann man eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zuordnen. Eine solche Zuordnung heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung**.

Beispiel:
Zwei Münzen werden gleichzeitig geworfen. Das Zufallsexperiment hat die Anzahl der sichtbaren Wappen als Ergebnis. Die folgende Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung an.

e	0	1	2
P(e)	0,25	0,50	0,25

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ergibt immer 1 bzw. 100 %

1 Geben Sie Ergebnismenge und gegebenenfalls die Wahrscheinlichkeitsverteilung der folgenden Zufallsexperimente an.
a) Drehen des nebenstehenden Glücksrades

S = { 0, g, s }

e	0	g	s
P(e)	3/4	1/8	1/8

b) Augensumme beim Werfen von zwei Würfeln
S = { 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 }

c) Ziehen von zwei Kugeln mit einem Griff aus einer Urne mit vier Kugeln mit den Nummern 1 bis 4
S = { (1,2)(1,3)(1,4)(2,3)(2,4)(3,4) }

e						
P(e)	1/6					

2 Vervollständigen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

a)

e	a	b	c	d
P(e)	0,2	0,15	0,3	0,35

b)

e	a	b	c	d
P(e)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

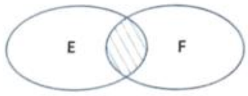
3 Wie viele Ergebnisse haben die folgenden Ergebnismengen? In welcher Ergebnismenge sind alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich?

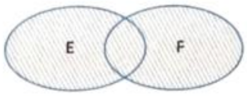
(1) Ein regelmäßiges Tetraeder mit den Seitenbeschriftungen 1 bis 4 wird zweimal nacheinander geworfen und
a) das Produkt,
b) die Differenz (1. Wurf minus 2. Wurf),
c) die Summe aus dem Zehnfachen des 1. Wurfes und dem 2. Wurf notiert.

(2) Drei unterschiedliche Würfel werden gleichzeitig geworfen und
a) das Ergebnis in der Form (____) (z.B. (236)),
b) die Summe aus den drei Würfen notiert.

Schnitt- und Vereinigungsmenge

Aus zwei oder mehr Mengen können Schnittmengen und Vereinigungsmengen gebildet werden:
In E ∩ F sind alle Ergebnisse enthalten, die zu E **und** F gehören.
In E ∪ F sind alle Ergebnisse enthalten, die zu E **oder** F gehören.





SO GEHT'S

1 **Beispiel**
Das abgebildete Glücksrad wird gedreht.

a) Gib die Ereignismenge des Ereignisses E: „Die Zahl ist durch drei teilbar" an.
b) Gib die Ereignismenge des Ereignisses F: „Die Zahl liegt auf einem blauen Feld" an.
c) Gib die Schnittmenge E ∩ F an.
d) Gib die Vereinigungsmenge E ∪ F an.

a) Notiere die zum Ereignis E gehörenden Ergebnisse:

E = {0; 3; 6; 9; 12; 15}

b) Notiere die zum Ereignis F gehörenden Ergebnisse:

F = {0; 3; 5; 8; 12; 15}

c) Bilde die Schnittmenge beider Ereignisse:

E ∩ F = {0; 3; 12; 15}

d) Bilde die Vereinigungsmenge beider Ereignisse:

E ∪ F = {0; 3; 5; 6; 8; 9; 12; 15}

Du bist dran
Das abgebildete Glücksrad wird gedreht.

a) Gib die Ereignismenge des Ereignisses E: „Die Zahl ist durch zwei teilbar" an.
b) Gib die Ereignismenge des Ereignisses F: „Die Zahl liegt auf einem roten Feld" an.
c) Gib die Schnittmenge E ∩ F an.
d) Gib die Vereinigungsmenge E ∪ F an.

$E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

$F = \{1, 2, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14\}$

$E \cap F = \{2, 4, 6, 10, 14\}$

2 Ein Beutel enthält 10 Kugeln mit den Zahlen 0 bis 9. Es wird eine Kugel gezogen.
a) Gib die folgenden Ereignismengen an:
A: „Die Zahl ist eine Primzahl."
B: „Die Zahl ist gerade."
C: „Die Zahl ist durch 5 teilbar."
b) Bilde die folgenden Schnitt- bzw. Vereinigungsmengen:
A ∩ B, B ∩ C, B ∪ C, A ∪ C.

Max und Moritz im Kasino:
$E_1 = \{1, \dots 18\}$
$E_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35\}$
$E_3 = E_1 \cup E_2 = \{1, 2, \dots\ 18, 20, \dots\ 36\}$

Roulette -> Laplace-Experiment (Alle Ausgänge sind gleich wahrscheinlich)

Baumdiagramm

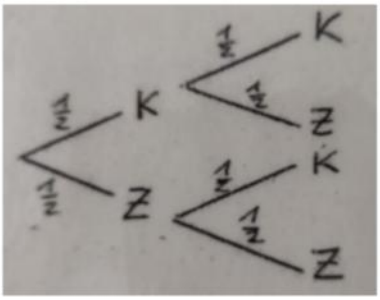
Freitag, 6. Juni 2025 10:00

Hausaufgaben:

Mehrstufige Zufallsexperimente

Ein **mehrstufiger Zufallsversuch** ist ein Experiment, bei dem einstufige Versuche mehrfach hintereinander ausgeführt werden.
Vorteilhaft lassen sich mehrstufige Zufallsversuche in **Baumdiagrammen** darstellen, da jeder Pfad des Baumes genau ein Ergebnis des Versuchs repräsentiert.

Beispiel: Das zweimalige Werfen einer Münze lässt sich im folgenden Baumdiagramm darstellen.

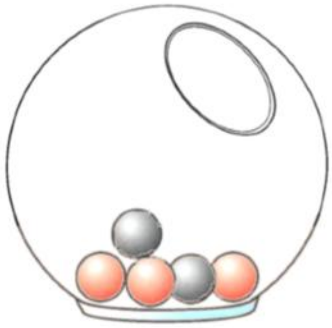


<u>Pfadregeln für Baumdiagramme:</u>

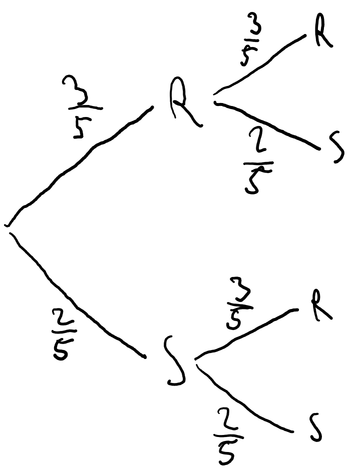
Für in Baumdiagrammen dargestellte mehrstufige Zufallsversuche gilt:

1. **Multiplikationsregel**: Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist gleich dem Produkt aller Astwahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades (**Pfadwahrscheinlichkeit**)
2. **Additionsregel**: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

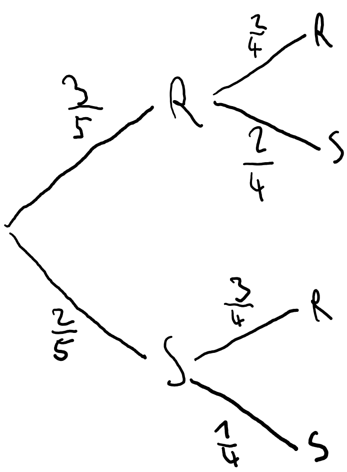
Beispiel: In einer Urne liegen drei rote und zwei schwarze Kugeln. Es werden zwei Kugeln gezogen. Zeichnen Sie den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsbaum und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E: „Beide gezogenen Kugeln sind gleichfarbig“ mit und ohne Zurücklegen der jeweils gezogenen Kugel.



Ziehen mit Zurücklegen:



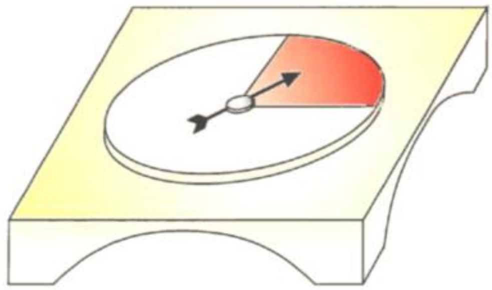
Ziehen ohne Zurücklegen:

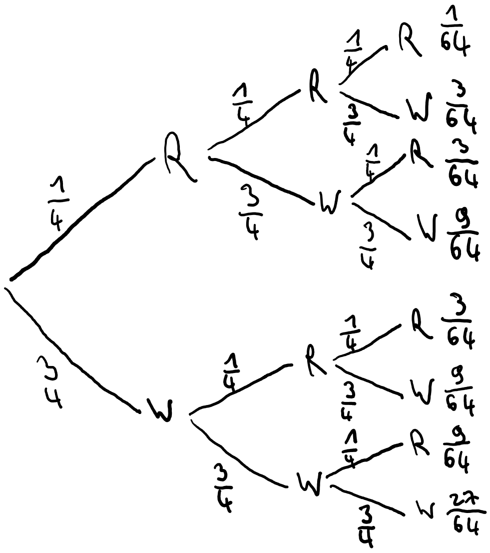


Mehrstufige Zufallsexperimente

Ein Glücksrad hat zwei Sektoren. Der weiße Sektor ist dreimal so groß wie der rote Sektor. Das Rad wird dreimal gedreht.
Zeichnen Sie den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsbaum und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_1: „Es kommt dreimal Rot",
E_2: „Es kommt stets die gleiche Farbe",
E_3: „Es kommt die Folge Rot/Weiß/Rot",
E_4: „Es kommt insgesamt zweimal Weiß und einmal Rot",
E_5: „Es kommt mindestens zweimal Rot".





E1 → $\frac{1}{64}$

E2 → $\frac{28}{64}$

E3 → $\frac{3}{64}$

E4 → $\frac{27}{64}$

E5 → $\frac{7}{64}$

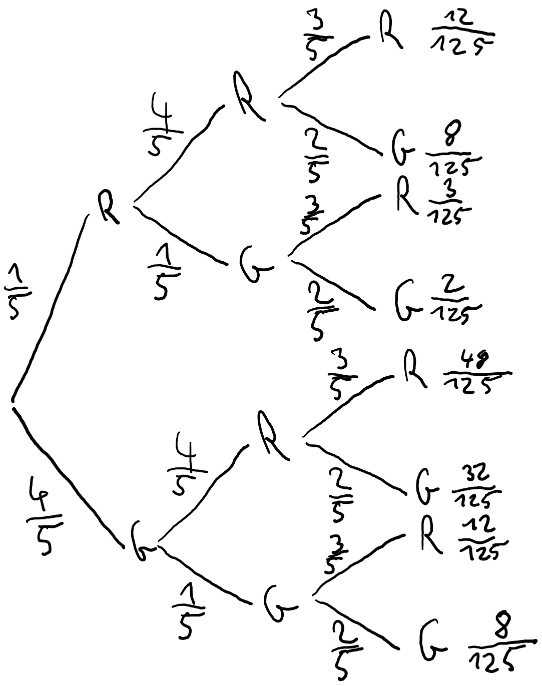
Grüne Welle

Dienstag, 10. Juni 2025 10:00

Hausaufgaben:

Bestimme die Wahrscheinlichkeit für

a) "grüne Welle"
b) genau 2x rot
c) mindestens 1x rot



Baumdiagramm

Wenn ein Experiment mehrmals ausgeführt wird, kannst du für jedes einzelne Ergebnis einen Ast zeichnen. Alle möglichen Äste zusammen ergeben das Baumdiagramm.

SO GEHT'S

Beispiel

Auf dem Tisch liegen verdeckt fünf Karten, zwei Asse (A) und drei Damen (D). Zwei Karten werden nacheinander aufgedeckt, ohne sie wieder umzudrehen. Trage alle Ergebnisse in ein Baumdiagramm ein und gib die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E an.
E: Ein Ass und eine Dame sind aufgedeckt.

Schreibe die möglichen Ergebnisse auf:

A, D

Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für den ersten Zug:

1. Ergebnis: Ass. $P(A) = \frac{2}{5}$

2. Ergebnis: Dame. $P(D) = \frac{3}{5}$

Da die Karten nicht wieder umgedreht werden, handelt es sich hier um ein Ziehen ohne Zurücklegen.
Notiere den Stand vor dem zweiten Zug:

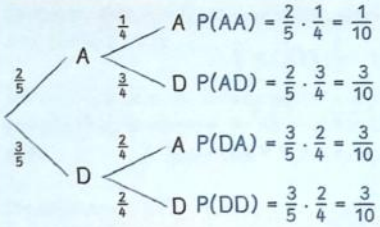
Für den 2. Zug sind noch 4 Karten verdeckt,
beim 1. Ergebnis: 1 Ass und 3 Damen,
beim 2. Ergebnis: 2 Asse und 2 Damen.

Für jedes Ergebnis gibt es wieder zwei mögliche Ergebnisse.
Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für den zweiten Zug:

nach dem 1. Ergebnis: $P(A) = \frac{1}{4}$;
$P(D) = \frac{3}{4}$

nach dem 2. Ergebnis: $P(A) = \frac{2}{4}$;
$P(D) = \frac{2}{4}$

Zeichne das Baumdiagramm und schreibe ans Ende jedes Pfades das Ergebnis und die Wahrscheinlichkeiten:



Schreibe alle Ergebnisse für das Ereignis E auf:

AD, DA

Lies die Wahrscheinlichkeiten der günstigen Ergebnisse am Baumdiagramm ab und addiere sie:

$P(E) = P(AD) + P(DA) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$
$= 0{,}6 = 60\,\%$

Du bist dran

Auf dem Tisch liegen verdeckt sechs Karten, drei Asse (A) und drei Damen (D). Zwei Karten werden nacheinander aufgedeckt, ohne sie wieder umzudrehen. Trage alle Ergebnisse in ein Baumdiagramm ein und gib die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E an.
E: Zwei Damen sind aufgedeckt.

A, D

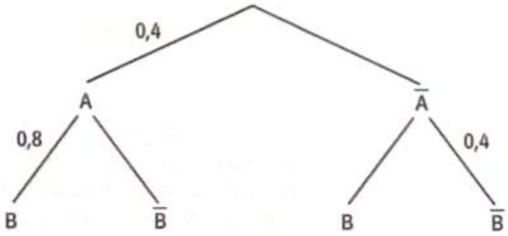
$P(A) = \frac{3}{6}$

$P(D) = \frac{3}{6}$

2 Eine Münze wird 3-mal geworfen.
a) Stelle alle Ergebnisse für Zahl (Z) und Wappen (W) in einem Baumdiagramm dar.
b) Notiere alle Ergebnisse, bei denen genau 2-mal „Zahl" vorkommt.
c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2-mal Zahl vorkommt.

3 In einer Vase befinden sich 10 Blumen, 5 rote, 3 gelbe, 2 weiße. Jemand nimmt, ohne hinzuschauen, zwei Blumen heraus. Stelle die möglichen Ergebnisse in einem Baumdiagramm dar. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die zwei Blumen unterschiedliche Farben haben.

4 Bestimme die fehlenden Wahrscheinlichkeiten an den Ästen und berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse am Ende der Äste.

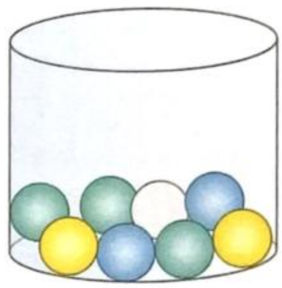


6 Du ziehst drei Karten aus einem Stapel mit jeweils 10 Herz-, Karo-, Kreuz- und Pik-Karten, ohne sie zurückzulegen. Zeichne einen Teilbaum mit den Ästen „Herz" und „Nicht Herz". Bestimme die Wahrscheinlichkeit, genau eine Herz-Karte zu ziehen.

7 Ein Glücksrad hat drei Felder mit drei verschiedenen Farben.
1. Feld: 90° rot, 2. Feld: 120° blau, 3. Feld: 150° weiß.
Du darfst dreimal drehen. Beschreibe, welches Ereignis die Wahrscheinlichkeiten beschreiben.

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ **b)** $3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$ **c)** $3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^2$

8 In einer Urne befinden sich 1 weiße, 2 gelbe, 2 blaue und 3 grüne Kugeln. Du darfst zweimal mit verbundenen Augen eine Kugel ziehen, ohne sie zurückzulegen. Zeichne jeweils einen geeigneten Teilbaum. Bestimme die Wahrscheinlichkeit,
a) genau einmal eine blaue Kugel zu ziehen.
b) die weiße Kugel zu ziehen.
c) genau eine grüne und eine weiße Kugel zu ziehen.



9 Ein Spielwürfel wird geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass erst beim 5. Mal eine Sechs auftritt.

Vierfeldertafel, bedingte Wahrscheinlichkeit

Freitag, 13. Juni 2025 10:00

Hausaufgaben:

Die **Vierfeldertafel** ist ein Hilfsmittel in der Stochastik, um Zusammenhänge zwischen zwei Ereignissen A und B darzustellen:

	A	$\bar{A}$	
B	6/20	6/20	12/20
$\bar{B}$	6/20	2/20	8/20
	12/20	8/20	1

Egal, ob man Wahrscheinlichkeiten oder absolute Häufigkeiten beschreiben will, stehen

- in der ersten Zeile die Symbole für das Ereignis A und sein Gegenereignis $\bar{A}$.
- in der ersten Spalte die Symbole für das Ereignis B und sein Gegenereignis $\bar{B}$.

Äußere Felder

	A	$\bar{A}$
B		
$\bar{B}$		
	$P(A)$	$P(\bar{A})$

- In der letzten Zeile der A-Spalte steht die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A. Man bezeichnet diese mit $P(A)$
- In der letzten Zeile der $\bar{A}$-Spalte steht die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\bar{A}$. Diese wird mit $P(\bar{A})$ bezeichnet.

	A	$\bar{A}$	
B			$P(B)$
$\bar{B}$			$P(\bar{B})$

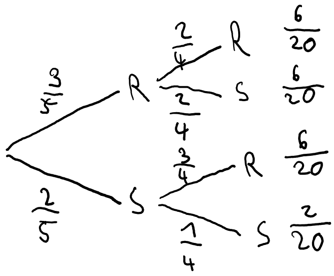
- In der letzten Spalte der B-Zeile steht die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ für das Ereignis B.
- In der letzten Spalte der $\bar{B}$-Zeile steht die Wahrscheinlichkeit $P(\bar{B})$ für das Ereignis $\bar{B}$.

Innere vier Felder

	A	$\bar{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

- In den restlichen vier Feldern notiert man die Wahrscheinlichkeiten der Schnittmengen der Ereignisse $A \cap B$, $\bar{A} \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap \bar{B}$.
- Dabei ist die letzte Wahrscheinlichkeit in einer Zeile die Summe der anderen beiden. Zum Beispiel $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.
- Dasselbe gilt für die letzte Wahrscheinlichkeit einer Spalte. Zum Beispiel $P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

- Vervollständigen Sie mit folgenden Informationen eine Vierfeldertafel: $P(A) = 0{,}45$; $P(A \cap \bar{B}) = 0{,}2$; $P(\bar{B}) = 0{,}7$
- Verfahren Sie ebenso mit folgenden Angaben: $P(A \cap B) = 0{,}12$; $P(\bar{A}) = 0{,}51$; $P(B) = 0{,}44$
- In einer Klasse gibt es 12 Schülerinnen und 8 Schüler. Zwei Jungs sind Raucher. Insgesamt raucht ein Fünftel aller Schülerinnen und Schüler dieser Klasse. Wie viele Mädchen sind Nichtraucher? Beantworten Sie die Frage mit einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel.



Vierfeldertafel

	A	$\bar{A}$	
B	0,25	0,05	0,3
$\bar{B}$	0,2	0,5	0,7
	0,45	0,55	1

Vierfeldertafel

	A	$\bar{A}$	
B	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$
$\bar{B}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{16}{20}$
	$\frac{8}{20}$	$\frac{12}{20}$	1

A: rot

B: •

$P(A) \cdot P_A(B) = P(A \cap B)$

B: •

$\frac{4}{10}$ — A — $\frac{3}{4}$ — B $\quad \frac{3}{10} = \frac{12}{40}$

$P(A) \cdot P_A(B) = P(A \cap B)$

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

$P(A)$ — A — $P_A(B)$ — B $\quad P(A \cap B)$

Vierfeldertafel

In einem Fitnessstudio wurde eine Umfrage unter den weiblichen und männlichen Kunden durchgeführt, ob sie mit der Sauberkeit der Umkleideräume zufrieden sind. Unter allen abgegebenen Fragebögen wird ein Bogen zufällig ausgewählt.

In der Folgenden Vierfeldertafel sind einige Wahrscheinlichkeiten bereits eingetragen. Dabei sind M: „Die Person ist männlich." und Z: „Die Person ist mit der Sauberkeit zufrieden."

	M	$\overline{M}$	
Z	$\frac{7}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{9}{16}$
$\overline{Z}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{4}{16}$	$\frac{7}{16}$
	$\frac{5}{8}$ $\frac{10}{16}$	$\frac{3}{8}$ $\frac{6}{16}$	1

1. Beschreibe die Bedeutung des grau hinterlegten Feldes und die des Feldes direkt darunter im Sachzusammenhang.
   grau:

   ____

   ____

   unter grau:

   ____

   ____

2. Ergänze die übrigen Einträge der Vierfeldertafel.
3. Nenne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person weiblich ist und mit der Sauberkeit der Umkleideräume nicht zufrieden ist.
4. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Frau mit der Sauberkeit der Umkleideräume nicht zufrieden ist.

Vierfeldertafel

Bei einer Versuchsreihe nehmen 50 Personen teil. 23 von diesen Personen wurden auf eine bestimmte Krankheit positiv getestet. 32 Testpersonen sind gegen diese Krankheit geimpft, wobei 15 Personen positiv getestet wurden und nicht dagegen geimpft sind.

Vierfeldertafel:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) Eine zufällig ausgewählte geimpfte Person positiv getestet wurde?

b) Eine zufällig ausgewählte nicht-geimpfte Person positiv getestet wurde?

c) Bewerte die Wirksamkeit der Impfung.

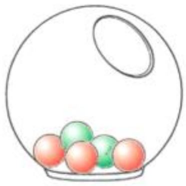
Zufallsvariable

Freitag, 27. Juni 2025 10:00

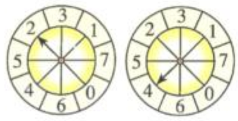
Hausaufgaben:

Zufallsvariable

1. Aus der abgebildeten Urne wird dreimal mit Zurücklegen gezogen.
X sei die Anzahl der insgesamt gezogenen roten Kugeln. Welche Werte kann X annehmen? Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an.



2. Die beiden Glücksräder drehen sich unabhängig voneinander.
Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X (Gewinn/Verlust) auf.



Einsatz: 1 Euro

Auszahlung:
0 0: 10 Euro
x x: 5 Euro
x 0: 1 Euro

x = Ziffer außer 0

3. In einem Karton sind 8 Lose, davon sind 4 Gewinne und 4 Nieten. Es wird ohne Zurücklegen gezogen. Jemand zieht drei Lose. X sei die Anzahl der dabei gezogenen Gewinne.
a) Legen Sie ein Baumdiagramm an.
b) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X auf.

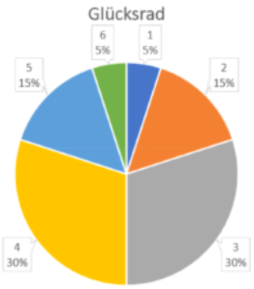
4. Ein Glücksrad wird zweimal gedreht. Gespielt wird nach nebenstehendem Gewinnplan. X sei der Gewinn.
a) Welche Werte kann X annehmen?
b) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X auf.

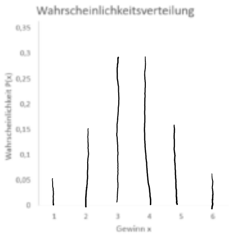
Erwartungswert

Dienstag, 1. Juli 2025 10:00

Hausaufgaben:

Erwartungswert





Zufallswert x_i	1	2	3	4	5	6
Erwartete Häufigkeit bei 100 Spielen	5	15	30	30	15	5
Wahrscheinlichkeit $P(x_i)$	$\frac{5}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{5}{100}$

Obiges Glücksrad wird gedreht. Der Gewinn beträgt je nach Feld 1€ bis 6€

1. Fülle die Tabelle und das Diagramm.
2. Welchen Gewinn würde man nach 100 Spielen ungefähr erwarten?

$1 \cdot 5 + 2 \cdot 15 + \ldots + 6 \cdot 5 = 350$ €

3. Welchen Gewinn μ erwartet man durchschnittlich pro Spiel?

350 € $: 100 = 3{,}50$ €

4. Formuliere eine Formel für μ.

$\mu = E(X) = x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + \ldots + x_6 \cdot P(x_6)$

$\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot P(x_i)$

Erwartungswert

Beispiel: Auf einem Jahrmarkt wird der Wurf mit zwei Würfeln als Glücksspiel angeboten, wobei der nebenstehend aufgeführte Gewinnplan gelte. Welche langfristige Gewinnerwartung ergibt sich bei den offenbar günstigen Gewinnmöglichkeiten?

Einsatz 1 €	
Augensumme	Auszahlung
2–9	0 €
10	2 €
11	5 €
12	15 €

Augensumme	2-9	10	11	12
Zufallswert x_i (Nettogewinn pro Spiel)	0 -1	2 1	5 4	15 14
Wahrscheinlichkeit $P(x_i)$	$\frac{30}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Berechne den Erwartungswert μ für den Nettogewinn des Glücksspiels.

$0 \cdot \frac{30}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + \dots + 15 \frac{1}{36}$

$-1 \cdot \frac{30}{36} + \dots + 14 \cdot \frac{1}{36} \approx 0,14$

Erwartungswert

Übungen

2. Gegeben ist die tabellarische Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

x_i	-5	0	11	50	100
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{48}$

3. a) Wie groß ist der Erwartungswert für die Augenzahl beim Werfen eines Würfels?
b) Es werden zwei Würfel geworfen. Berechnen Sie den Erwartungswert für Zufallsgröße X = „Anzahl der geworfenen Sechsen".

4. Eine Münze wird fünfmal geworfen. Die Zufallsgröße X ist die Anzahl der Kopfwürfe.
a) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X auf.
b) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

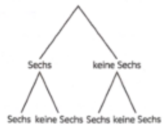
1 Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung in der Tabelle angegeben ist.

k	−5	−2	0	3	6
P(X = k)	28 %	22 %	18 %	15 %	17 %

2 Bei einem Spiel beträgt der Einsatz 1 €. Man wirft mit zwei Würfeln. Die Auszahlung beträgt bei einer Sechs 1 €, bei zwei Sechsen 10 € und ansonsten 0 €. Die Zufallsgröße X gibt den Gewinn in Euro an.

a) X nimmt die Werte ______________________ an.

b) Vervollständigen Sie das Baumdiagramm und tragen Sie in der Tabelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ein.



c) Der Erwartungswert von X ist μ = ______________________.

Man kann ihn wie folgt interpretieren: ______________________

____

____.

d) Nun ändert man die Auszahlung bei zwei Sechsen auf 40 €. Wie verändert dies den Erwartungswert von X?

g			
P(X = g)			

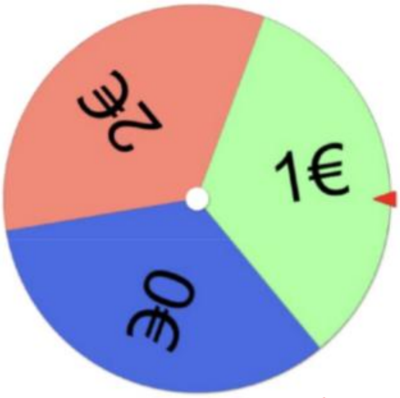
Streuung

Freitag, 4. Juli 2025 10:00

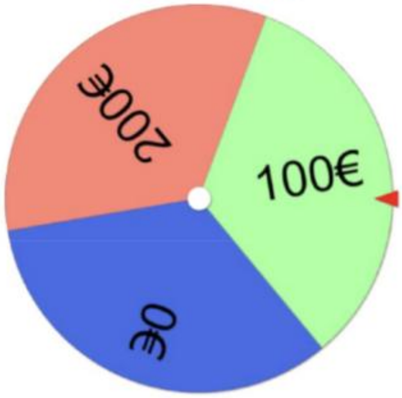
Hausaufgaben:

Streuung

Einsatz 1€



Einsatz 100€



	-1	0	1
x_i	0	1	2
$P(x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

	-100	0	100
x_i	0	100	200
$P(x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Erwartungswert:

$-1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}$

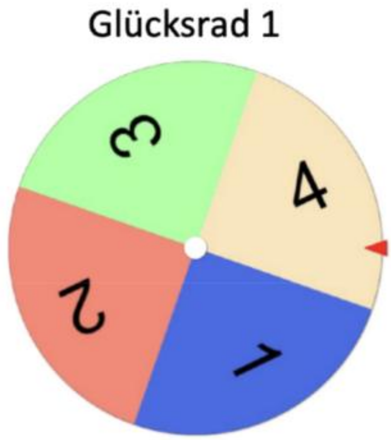
0€

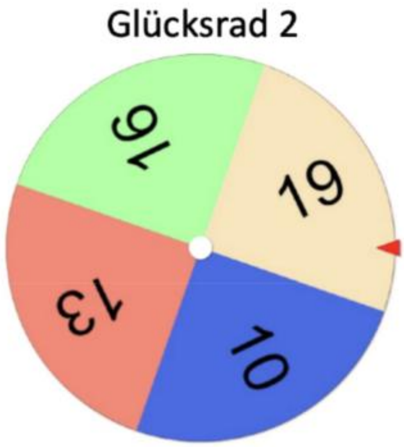
Erwartungswert:

0€

1. Gegeben sind zwei Glücksräder. Erstelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung und berechne den Erwartungswert.
2. Welches Glücksrad würdest du auf dem Jahrmarkt lieber spielen? Beschreibe, worin sich die beiden Glücksspiele unterscheiden.

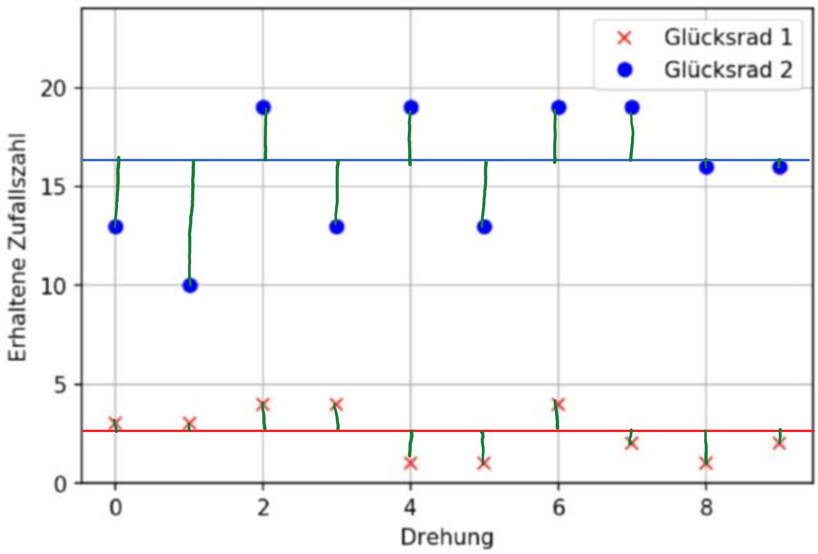
Streuung





Gegeben sind zwei Glücksräder. Sie werden beide 10-mal gedreht. Es ergeben sich folgende Daten.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Glücksrad 1	3	3	4	4	1	1	4	2	1	2
Glücksrad 2	13	10	19	13	19	13	19	19	16	16



Entwickelt anhand der Datenreihen eine mögliche Formel, um die Streuung s einer Datenreihe zu beschreiben. Je größer die Streuung einer Datenreihe ist, desto größer soll der Wert für s sein.

Tipp: Es könnte bei den Überlegungen helfen, zuerst die Mittelwerte als horizontale Linien einzuzeichnen und sich daran zu orientieren.

$Var(x) = (x_1 - E(x))^2 \cdot P(x_1) + (x_2 - E(x))^2 \cdot P(x_2) + \ldots$

Varianz (Streuungsmaß)

$\sqrt{Var} = \sigma$ Standardabweichung

Roulette

Dienstag, 8. Juli 2025 10:00

Hausaufgaben:

Roulette

Beispiel: Vergleichen Sie die beiden folgenden Strategien beim Roulette. Berechnen Sie dazu den Erwartungswert der Zufallsgröße „Gewinn/Verlust pro Spiel" sowie die Varianz dieser Zufallsgröße und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Strategie 1: Spieler A setzt stets 10 € auf seine Lieblingsfarbe ROT.

Strategie 2: Spieler B setzt stets 10 € auf seine Glückszahl 22.

2x

Farbe

Gewinn	-10	10
Wahrsch.	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

$E(x) = -10 \cdot \frac{19}{37} + 10 \cdot \frac{18}{37} \approx -0{,}27$

$Var(x) = (-10-(-0{,}27))^2 \cdot \frac{19}{37}$

$+ (10-(-0{,}27))^2 \cdot \frac{18}{37} \approx 99$

36x

Zahl

Gewinn	-10	350
Wahrsch.	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$

$E(x) = -10 \cdot \frac{36}{37} + 350 \cdot \frac{1}{37} \approx -0{,}27$

$Var(x) = (-10-(-0{,}27))^2 \dots + (350 \dots$

~ 3600

$Var(X) = (-10-(-0{,}27))^2 \cdot \frac{\ }{37}$

$+ (10-(-0{,}27))^2 \cdot \frac{18}{37} \approx 9{,}9$

$Var(X) = (-10-(-0{,}27))^2 \ \ldots + (350 \ldots$

≈ 3400

Kombinatorik

Dienstag, 8. Juli 2025 10:30

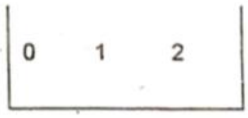
Hausaufgaben:

Geordnete Stichprobe mit zurücklegen

Paradebeispiel: Fußballtoto

Man muss beim Fußballtoto den Ausgang von elf ausgewählten Spielen vorhersagen.
(2 „ Auswärtssieg“; 1 „Heimsieg“; 0 „Unentschieden“)

Simulation: Man zieht aus einer Urne elfmal mit zurücklegen.
Dabei kommt es auf die Reihenfolge an.



Beispiel: 0; 1; 1; 2; 2; 0; 1; 1; 0; 1; 2

Erarbeitungsphase:

1. Eine Münze soll viermal geworfen werden. Dabei soll die Reihenfolge eine Rolle spielen.

   a) Zeichne ein Baumdiagramm.
   b) Schreibe alle möglichen Ergebnisse auf.
   c) Wie viele Ergebnisse gibt es?

2. Das Glücksrad wird dreimal gedreht und die Ziffern mit Reihenfolge notiert.

   a) Zeichne ein Baumdiagramm.
   b) Wie viele Ergebnisse gibt es?

3. Wie viele Möglichkeiten gibt es beim Fußballtoto den Tippschein auszufüllen?

Verallgemeinerung:

Aus einer Urne mit n Kugeln wird k-mal eine Kugel mit zurücklegen gezogen. Die Reihenfolge spielt eine Rolle. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Gesucht ist also eine Formel mit den Parametern n und k, mit deren Hilfe man die Anzahl der Möglichkeiten berechnen kann:

$N(k,n) =$

Geordnete Stichprobe ohne zurücklegen

Paradebeispiel: Rennquintett

An einem Pferderennen nehmen 15 Pferde teil. Man muss die ersten drei Pferde, die ins Ziel kommen in der richtigen Reihenfolge vorhersagen.

Simulation: Man zieht aus der Urne mit 15 Kugeln dreimal ohne zurücklegen und notiert sich die Reihenfolge der gezogenen Kugeln.

Beispiel: 14; 3; 7

8	10	1
2	6	7

Erarbeitungsphase:

1. Ein As, ein König, eine Dame und ein Bube werden gemischt. Anschließend werden drei Karten ohne zurücklegen gezogen. Dabei spielt die Reihenfolge eine Rolle.

   a) Zeichne ein Baumdiagramm.
   b) Schreibe alle Möglichkeiten auf.
   c) Wie viele Möglichkeiten gibt es?

2. Aus einer Urne mit den Kugeln 1 bis 5 werden zwei Kugeln ohne zurücklegen gezogen. Dabei spielt die Reihenfolge eine Rolle.

   a) Zeichne ein Baumdiagramm.
   b) Wie viele Möglichkeiten gibt es?
   c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, falls man drei Kugeln statt zwei Kugeln zieht?

3. Bestimme die Anzahl aller Möglichkeiten den Tippschein beim Rennquintett auszufüllen.

Verallgemeinerung:

Aus einer Urne mit n Kugeln werden k Kugeln ohne zurücklegen gezogen. Die Reihenfolge spielt eine Rolle. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Gesucht ist also eine Formel mit den Parametern n und k, mit deren Hilfe man die Anzahl aller Möglichkeiten berechnen kann:

N(k,n) =

Minilotto

Freitag, 11. Juli 2025 10:00

Hausaufgaben:

0, 1, 2

$\underbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdot \ldots}_{11} = 3^{11} = 177147$

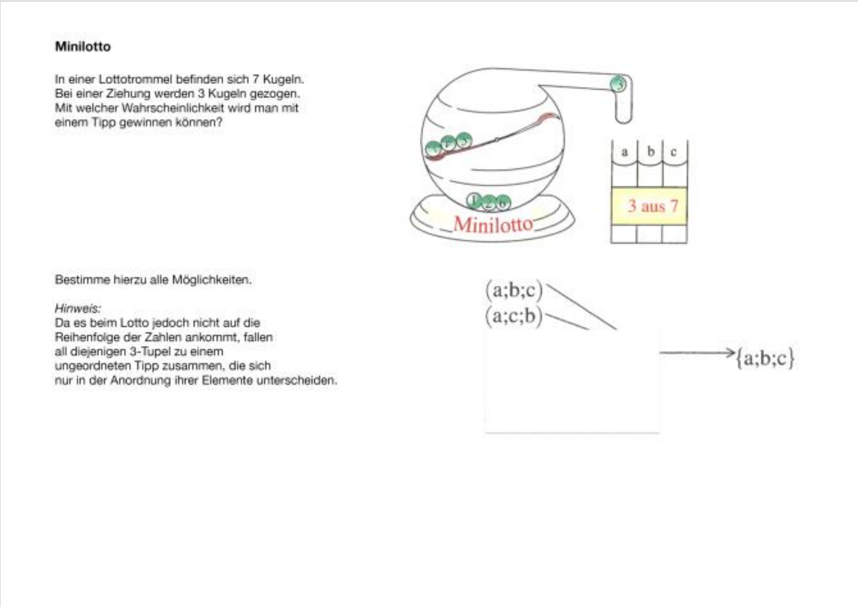
K-mal mit zurücklegen

$N = n^k$

ziehen ohne zurücklegen (mit Reihenfolge)

$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\ldots(n-k+1)$

$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots\cdot 1$



Minilotto

In einer Lottotrommel befinden sich 7 Kugeln.
Bei einer Ziehung werden 3 Kugeln gezogen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird man mit einem Tipp gewinnen können?

Bestimme hierzu alle Möglichkeiten.

Hinweis:
Da es beim Lotto jedoch nicht auf die Reihenfolge der Zahlen ankommt, fallen all diejenigen 3-Tupel zu einem ungeordneten Tipp zusammen, die sich nur in der Anordnung ihrer Elemente unterscheiden.

(a;b;c)
(a;c;b) → {a;b;c}

mit Reihenfolge

$7\cdot 6\cdot 5 = 210$

(a,b,c)
(a,c,b)
(b,a,c)
(b,c,a)
(c,a,b)
(c,b,a)

6 Stück → {a,b,c}

$\frac{210}{6} = 35$

$7! = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{\underbrace{3\cdot 2\cdot 1}_{6 = 3!}\cdot\underbrace{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{4!}} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!}$

k

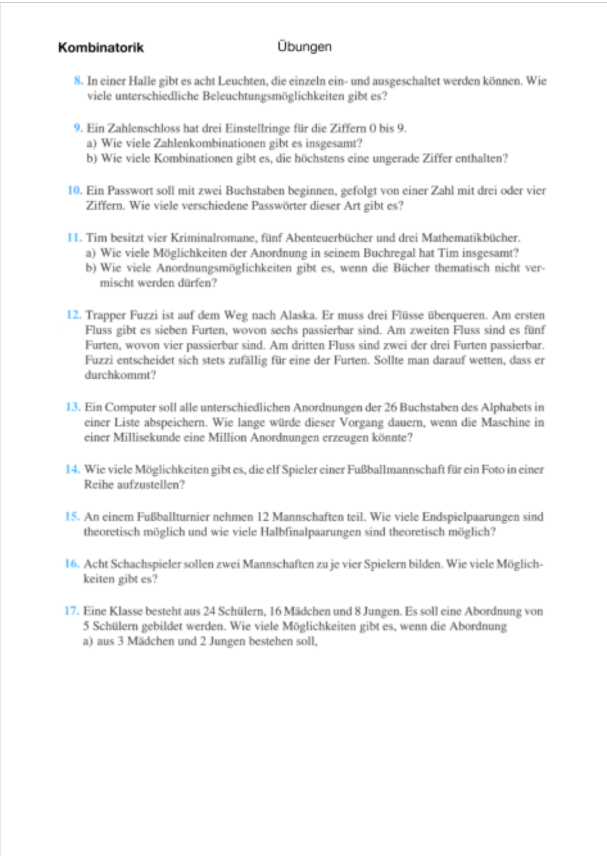
ohne Reihenfolge

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

n über k

6 aus 49

$\frac{49!}{6!\,(49-6)!}$



Kombinatorik Übungen

8. In einer Halle gibt es acht Leuchten, die einzeln ein- und ausgeschaltet werden können. Wie viele unterschiedliche Beleuchtungsmöglichkeiten gibt es?

9. Ein Zahlenschloss hat drei Einstellringe für die Ziffern 0 bis 9.
   a) Wie viele Zahlenkombinationen gibt es insgesamt?
   b) Wie viele Kombinationen gibt es, die höchstens eine ungerade Ziffer enthalten?

10. Ein Passwort soll mit zwei Buchstaben beginnen, gefolgt von einer Zahl mit drei oder vier Ziffern. Wie viele verschiedene Passwörter dieser Art gibt es?

11. Tim besitzt vier Kriminalromane, fünf Abenteuerbücher und drei Mathematikbücher.
   a) Wie viele Möglichkeiten der Anordnung in seinem Buchregal hat Tim insgesamt?
   b) Wie viele Anordnungsmöglichkeiten gibt es, wenn die Bücher thematisch nicht vermischt werden dürfen?

12. Trapper Fuzzi ist auf dem Weg nach Alaska. Er muss drei Flüsse überqueren. Am ersten Fluss gibt es sieben Furten, wovon sechs passierbar sind. Am zweiten Fluss sind es fünf Furten, wovon vier passierbar sind. Am dritten Fluss sind zwei der drei Furten passierbar. Fuzzi entscheidet sich stets zufällig für eine der Furten. Sollte man darauf wetten, dass er durchkommt?

13. Ein Computer soll alle unterschiedlichen Anordnungen der 26 Buchstaben des Alphabets in einer Liste abspeichern. Wie lange würde dieser Vorgang dauern, wenn die Maschine in einer Millisekunde eine Million Anordnungen erzeugen könnte?

14. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die elf Spieler einer Fußballmannschaft für ein Foto in einer Reihe aufzustellen?

15. An einem Fußballturnier nehmen 12 Mannschaften teil. Wie viele Endspielpaarungen sind theoretisch möglich und wie viele Halbfinalpaarungen sind theoretisch möglich?

16. Acht Schachspieler sollen zwei Mannschaften zu je vier Spielern bilden. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

17. Eine Klasse besteht aus 24 Schülern, 16 Mädchen und 8 Jungen. Es soll eine Abordnung von 5 Schülern gebildet werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Abordnung
   a) aus 3 Mädchen und 2 Jungen bestehen soll,

$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\,(49-6)!}$

„49 über 6"

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

TR

$\boxed{nCr}$

Taste